

量子コンピュータ設計へ向けた量子情報入門

練習問題の解答 (作成者 吾妻広夫)

Basics 3

3.1 ハミング符号の量子情報への拡張

[1]

(1) 問題文の二つの式の左右両辺の内積を取ると、次を得る。

$$(\langle\phi| \otimes \langle 0|)U^\dagger U(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = (\langle\phi| \otimes \langle\phi|)(|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle). \quad (1)$$

従って、 $U^\dagger U = \mathbf{I}$ より、

$$(\langle\phi| \otimes \langle 0|)(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = (\langle\phi| \otimes \langle\phi|)(|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle), \quad (2)$$

を得る。ここで、 $\langle 0|0\rangle = 1$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \langle\phi|\psi\rangle &= \langle\phi|\psi\rangle\langle\phi|\psi\rangle \\ &= (\langle\phi|\psi\rangle)^2, \end{aligned} \quad (3)$$

を得る。

(2) (1) の結果が正しいとすると、互いに異なる未知の任意の状態 $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ について、

$$\langle\phi|\psi\rangle = (\langle\phi|\psi\rangle)^2, \quad (4)$$

を得る。しかし、式 (4) が成立するには、 $|\psi\rangle = |\phi\rangle$ または $|\psi\rangle = 0$ または $|\phi\rangle = 0$ でなくてはならない。これは、 $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ が互いに異なる任意の状態であるという仮定に反する。ここで、 $|\psi\rangle = 0$ または $|\phi\rangle = 0$ となると、もはや $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ は状態でなくなることに注意する。よって、背理法により、未知の任意の状態のコピーを作るユニタリ演算子 U は存在しないことが言える。

[2]

(1) CNOT ゲートは、control qubit が $|j\rangle$ 、target qubit が $|k\rangle$ のとき、

$$|j\rangle \otimes |k\rangle \rightarrow |j\rangle \otimes |j \oplus k\rangle \quad \text{for } j, k \in \{0, 1\}, \quad (5)$$

と動作することを思い出す。

$$\begin{aligned} |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle &\xrightarrow{\text{1st CNOT gate}} |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\ &\xrightarrow{\text{2nd CNOT gate}} |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

よって、 $|\psi\rangle_L = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$ となる。

(2)

$$\begin{aligned} |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle &\xrightarrow{\text{1st CNOT gate}} |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \\ &\xrightarrow{\text{2nd CNOT gate}} |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

よって、 $|\psi\rangle_L = |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$ となる。

(3)

$$\begin{aligned} (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle &\xrightarrow{\text{1st CNOT gate}} (a|0\rangle \otimes |0\rangle + b|1\rangle \otimes |1\rangle) \otimes |0\rangle \\ &\xrightarrow{\text{2nd CNOT gate}} a|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle + b|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

よって、 $|\psi\rangle_L = a|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle + b|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$ となる。

(4) $|\psi\rangle_L$ を $|\psi\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$ に戻す量子回路は以下で与えられる。

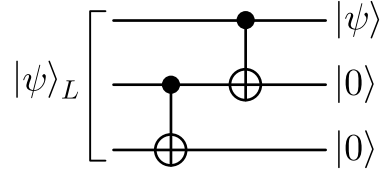


Figure 1: 3 量子ビット符号を復号する量子回路

Fig. 1 の量子回路の動作を、一つずつ追って確かめると、次のようになる。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_L &= a|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle + b|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \\ &\xrightarrow{\text{1st CNOT gate}} a|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle + b|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \\ &\xrightarrow{\text{2nd CNOT gate}} a|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle + b|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\ &= (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\ &= |\psi\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

よって、Fig. 1 の量子回路は正しく復号を行うことが理解される。

[3]

(1) 符号化の部分で、次の変換が行われる。

$$|\psi\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 = (a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1) |0\rangle_2 |0\rangle_3 \rightarrow a|0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 + b|1\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3. \quad (10)$$

エラー U_1 は、1 番目の量子ビットを次のように変換する。

$$\begin{aligned} |0\rangle_1 &\rightarrow U_1 |0\rangle_1 = \begin{pmatrix} \gamma & i\delta \\ i\delta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ i\delta \end{pmatrix} = \gamma|0\rangle_1 + i\delta|1\rangle_1, \\ |1\rangle_1 &\rightarrow U_1 |1\rangle_1 = \begin{pmatrix} \gamma & i\delta \\ i\delta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\delta \\ \gamma \end{pmatrix} = i\delta|0\rangle_1 + \gamma|1\rangle_1. \end{aligned} \quad (11)$$

よって、符号化された状態は次のように変換される。

$$\begin{aligned}
& a|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + b|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 \\
\rightarrow & a(\gamma|0\rangle_1 + i\delta|1\rangle_1)|0\rangle_2|0\rangle_3 + b(i\delta|0\rangle_1 + \gamma|1\rangle_1)|1\rangle_2|1\rangle_3 \\
& = a\gamma|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + ia\delta|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + ib\delta|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 + b\gamma|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3. \quad (12)
\end{aligned}$$

補助量子ビット $|0\rangle_4|0\rangle_5$ を付け加えてパリティ演算を行うと、以下の状態が得られる。

$$\begin{aligned}
& a\gamma|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4|0\rangle_5 + ia\delta|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|1\rangle_4|1\rangle_5 \\
& + ib\delta|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3|1\rangle_4|1\rangle_5 + b\gamma|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3|0\rangle_4|0\rangle_5. \quad (13)
\end{aligned}$$

上記の状態で、 $M_4 = 0$, $M_5 = 0$ となるのは、以下の成分となる。

$$a\gamma|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4|0\rangle_5 + b\gamma|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3|0\rangle_4|0\rangle_5 = \gamma(a|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + b|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3)|0\rangle_4|0\rangle_5. \quad (14)$$

上記の状態が得られる確率は、

$$\begin{aligned}
& [\gamma(a^*_1\langle 0|_2\langle 0|_3\langle 0| + b^*_1\langle 1|_2\langle 1|_3\langle 1|)|_4\langle 0|_5\langle 0|][\gamma(a|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + b|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3)|0\rangle_4|0\rangle_5] \\
& = \gamma^2(|a|^2 + |b|^2) \\
& = \gamma^2. \quad (15)
\end{aligned}$$

よって、 $M_4 = 0$, $M_5 = 0$ が測定される確率は γ^2 となる。補助量子ビット $|0\rangle_4|0\rangle_5$ が観測されると、量子ビット 1, 2, 3 は、次の状態に収縮する。

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma^2}}\gamma(a|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + b|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3) = a|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + b|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3. \quad (16)$$

ただし、ここで、 γ は正の実数として計算した。もし、 γ が負の実数であったとしても、波動関数全体に符号 ‘-’ が掛かるだけで、物理的な意味では違いはない。従って、output として出力される状態は、 $a|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + b|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3$ となる。

(2) 式 (13) の状態で、 $M_4 = 1$, $M_5 = 1$ となるのは、以下の成分となる。

$$ia\delta|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|1\rangle_4|1\rangle_5 + ib\delta|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3|1\rangle_4|1\rangle_5 = i\delta(a|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + b|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3)|1\rangle_4|1\rangle_5. \quad (17)$$

上記の状態が得られる確率は、

$$\begin{aligned}
& [-i\delta(a^*_1\langle 1|_2\langle 0|_3\langle 0| + b^*_1\langle 0|_2\langle 1|_3\langle 1|)|_4\langle 1|_5\langle 1|][i\delta(a|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + b|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3)|1\rangle_4|1\rangle_5] \\
& = \delta^2(|a|^2 + |b|^2) \\
& = \delta^2. \quad (18)
\end{aligned}$$

よって、 $M_4 = 1$, $M_5 = 1$ が測定される確率は δ^2 となる。補助量子ビット $|1\rangle_4|1\rangle_5$ が観測されると、量子ビット 1, 2, 3 は次の状態に収縮する。

$$\frac{1}{\sqrt{\delta^2}}i\delta(a|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + b|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3) = i(a|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + b|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3). \quad (19)$$

上式の前頭の因子 i は、状態全体に掛かる位相なので無視して良い。また、上式では、 δ を正の実数として計算しているが、 δ が負の実数でも、物理的な意味は変わらない結果が得られる。従って、output として出力される状態は、

$$|\phi\rangle = a|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + b|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3, \quad (20)$$

となる。この、1 番目の量子ビットが反転した状態は、Fig. 2 で示される量子回路でエラー訂正可能である。これは、 X によって、1 番目の量子ビットが、 $|0\rangle_1 \rightarrow |1\rangle_1$, $|1\rangle_1 \rightarrow |0\rangle_1$ と変換されるからである。

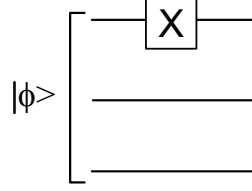


Figure 2: 1 番目の量子ビットの、ビット反転エラーを修正する量子回路

3.2 量子誤りの離散化

[4]

(1)

$$U = (\cos \epsilon) \mathbf{I} + (i \sin \epsilon) X, \quad (21)$$

より、

$$\begin{aligned} U^{\otimes 3} &= [(\cos \epsilon) \mathbf{I} + i(\sin \epsilon) X]^{\otimes 3} \\ &= (\cos \epsilon)^3 \mathbf{III} + (i \sin \epsilon)(\cos \epsilon)^2 (X \mathbf{II} + \mathbf{IXI} + \mathbf{IIX}) \\ &\quad + (i \sin \epsilon)^2 (\cos \epsilon) (X X \mathbf{I} + X \mathbf{IX} + \mathbf{IXX}) + (i \sin \epsilon)^3 X X X. \end{aligned} \quad (22)$$

よって、

$$\begin{aligned} c_0 &= \cos^3 \epsilon, \\ c_1 &= i \sin \epsilon \cos^2 \epsilon, \\ c_2 &= -\sin^2 \epsilon \cos \epsilon, \\ c_3 &= -i \sin^3 \epsilon, \end{aligned} \quad (23)$$

となる。

(2)

$$P_0 = |\langle 000|E|000\rangle|^2 = |c_0|^2 = \cos^6 \epsilon, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= |\langle 100|E|000\rangle|^2 + |\langle 010|E|000\rangle|^2 + |\langle 001|E|000\rangle|^2 \\ &= 3|c_1|^2 \\ &= 3 \sin^2 \epsilon \cos^4 \epsilon, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= |\langle 110|E|000\rangle|^2 + |\langle 101|E|000\rangle|^2 + |\langle 011|E|000\rangle|^2 \\
&= 3|c_2|^2 \\
&= 3\sin^4\epsilon\cos^2\epsilon,
\end{aligned} \tag{26}$$

$$P_3 = |\langle 111|E|000\rangle|^2 = |c_3|^2 = \sin^6\epsilon. \tag{27}$$

(3) エラーを引き起こす演算子 U は、 $|0\rangle$ を次のように変換する。

$$|0\rangle \rightarrow U|0\rangle = [(\cos\epsilon)\mathbf{I} + (i\sin\epsilon)X]|0\rangle = \cos\epsilon|0\rangle + i\sin\epsilon|1\rangle. \tag{28}$$

$|0\rangle$ が $|1\rangle$ に反転する確率は、以下で与えられる。

$$|\langle 1|U|0\rangle|^2 = \sin^2\epsilon. \tag{29}$$

よって、ビットが反転する確率は $p = \sin^2\epsilon$ で与えられる。また、 $\cos^2\epsilon + \sin^2\epsilon = 1$ より、 $\cos^2\epsilon = 1 - p$ を得る。よって、

$$P_0 = (1 - p)^3, \quad P_1 = 3p(1 - p)^2, \quad P_2 = 3p^2(1 - p), \quad P_3 = p^3, \tag{30}$$

を得る。

[5]

(1)

$$\begin{aligned}
E|\psi\rangle_L &= c_0(a|000\rangle + b|111\rangle) \\
&\quad + c_1[(a|100\rangle + b|011\rangle) + (a|010\rangle + b|101\rangle) + (a|001\rangle + b|110\rangle)] \\
&\quad + c_2[(a|110\rangle + b|001\rangle) + (a|101\rangle + b|010\rangle) + (a|011\rangle + b|100\rangle)] \\
&\quad + c_3(a|111\rangle + b|000\rangle).
\end{aligned} \tag{31}$$

(2)

$$\begin{aligned}
E|\psi\rangle_L|0\rangle|0\rangle &\rightarrow c_0(a|000\rangle + b|111\rangle)|0\rangle|0\rangle \\
&\quad + c_1(a|100\rangle + b|011\rangle)|1\rangle|1\rangle + c_1(a|010\rangle + b|101\rangle)|1\rangle|0\rangle \\
&\quad + c_1(a|001\rangle + b|110\rangle)|0\rangle|1\rangle \\
&\quad + c_2(a|110\rangle + b|001\rangle)|0\rangle|1\rangle + c_2(a|101\rangle + b|010\rangle)|1\rangle|0\rangle \\
&\quad + c_2(a|011\rangle + b|100\rangle)|1\rangle|1\rangle \\
&\quad + c_3(a|111\rangle + b|000\rangle)|0\rangle|0\rangle.
\end{aligned} \tag{32}$$

(3) 補助量子ビットが $|0\rangle|0\rangle$ のとき、

$$c_0(a|000\rangle + b|111\rangle) + c_3(a|111\rangle + b|000\rangle), \tag{33}$$

に収縮する。同様にして、 $|0\rangle|1\rangle$ のとき、

$$c_1(a|001\rangle + b|110\rangle) + c_2(a|110\rangle + b|001\rangle), \quad (34)$$

に、 $|1\rangle|0\rangle$ のとき、

$$c_1(a|010\rangle + b|101\rangle) + c_2(a|101\rangle + b|010\rangle), \quad (35)$$

に、 $|1\rangle|1\rangle$ のとき、

$$c_1(a|100\rangle + b|011\rangle) + c_2(a|011\rangle + b|100\rangle), \quad (36)$$

に収縮する。式 (33) より、ビット反転が全く起こっていない場合と、3 個の量子ビット全てでビット反転が起こった場合は、区別できない。式 (34) より、3 番目の量子ビットが反転した場合と、1 番目および 2 番目の量子ビットが反転した場合は区別できない。式 (35), (36) でも同様のことが言える。よって、このエラー訂正符号では、2 量子ビット以上の反転を訂正できない。

[6]

(1)

$$\begin{aligned} Z|0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle, \\ Z|1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|1\rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

(2) 以下の関係式が成立することを確認する。

$$Z|j\rangle = e^{ij\pi}|j\rangle \quad \text{for } j \in \{0, 1\}, \quad (38)$$

$j = 0$ とすると、式 (38) は、

$$Z|j\rangle = Z|0\rangle = e^{i0\pi}|0\rangle = e^0|0\rangle = |0\rangle, \quad (39)$$

となる。 $j = 1$ とすると、式 (38) は、

$$Z|j\rangle = Z|1\rangle = e^{i1\pi}|1\rangle = e^{i\pi}|1\rangle = -|1\rangle, \quad (40)$$

となる。これらの結果は、前の問題 (1) の結果と一致するので、つじつまが合っていて正しいと言える。

(3)

$$\begin{aligned} \langle +|+ \rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right] \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 0 + 0 + 1) \\ &= 1, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
\langle -|- \rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - \langle 1|) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right] \\
&= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle - \langle 0|1\rangle - \langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(1 - 0 - 0 + 1) \\
&= 1,
\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
\langle +|- \rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right] \\
&= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle - \langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle - \langle 1|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(1 - 0 + 0 - 1) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
\langle -|+ \rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - \langle 1|) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right] \\
&= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle - \langle 1|0\rangle - \langle 1|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(1 + 0 - 0 - 1) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
Z|+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}Z(|0\rangle + |1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(Z|0\rangle + Z|1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\
&= |-\rangle,
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
Z|-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}Z(|0\rangle - |1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(Z|0\rangle - Z|1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\
&= |+\rangle.
\end{aligned} \tag{46}$$

(4)

$$\begin{aligned}
& \text{Re}[\alpha]\mathbf{I} + i\text{Im}[\beta]X + i\text{Re}[\beta]Y + i\text{Im}[\alpha]Z \\
&= \begin{pmatrix} \text{Re}[\alpha] + i\text{Im}[\alpha] & i\text{Im}[\beta] + \text{Re}[\beta] \\ i\text{Im}[\beta] - \text{Re}[\beta] & \text{Re}[\alpha] - i\text{Im}[\alpha] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \\
&= U.
\end{aligned} \tag{47}$$

$$-iZX = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = Y. \tag{48}$$

以上の結果から、任意の 2×2 ユニタリ行列 U は次のように分顔できる。

$$U = \text{Re}[\alpha]\mathbf{I} + i\text{Im}[\beta]X + \text{Re}[\beta]ZX + i\text{Im}[\alpha]Z. \tag{49}$$

上式の右辺第1項はエラーが生じていない場合を、第2項は X エラーが生じている場合を、第3項は X と Z エラーが生じている場合を、第4項は Z エラーが生じている場合を、表現している。 X , Z エラーはビット反転エラー、位相反転エラーを表しているので、問題文の内容が実現されていると分かる。

[7]

(1) まず、Hadamard ゲートの動作を調べる。

$$\begin{aligned}
H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \\
H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).
\end{aligned} \tag{50}$$

そこで、問題文中の図で与えられた量子回路の動作を、左から順に追いかけてみる。

$$\begin{aligned}
& |\psi\rangle|0\rangle|0\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle)|0\rangle|0\rangle \\
& \xrightarrow{H} \left[\frac{a}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{b}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right] |0\rangle|0\rangle \\
& \xrightarrow{\text{1st CNOT}} \left[\frac{a}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) + \frac{b}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \right] |0\rangle \\
& \xrightarrow{\text{2nd CNOT}} \frac{a}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) + \frac{b}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle).
\end{aligned} \tag{51}$$

(2)

$$\begin{aligned}
& |\psi\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle)|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle \\
& \xrightarrow{\text{1st CNOT}} a|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle + b|1\rangle|0\rangle|0\rangle|1\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle \\
& \xrightarrow{\text{2nd CNOT}} a|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle + b|1\rangle|0\rangle|0\rangle|1\rangle|0\rangle|0\rangle|1\rangle|0\rangle|0\rangle \\
& \xrightarrow{\text{1st block}} \frac{a}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle)|1\rangle|0\rangle|0\rangle|1\rangle|0\rangle|0\rangle \\
& \xrightarrow{\text{2nd block}} \frac{a}{2}(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)|0\rangle|0\rangle|0\rangle \\
& \quad + \frac{b}{2}(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)|1\rangle|0\rangle|0\rangle \\
& \xrightarrow{\text{3rd block}} \frac{a}{\sqrt{8}}(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle) \\
& \quad + \frac{a}{\sqrt{8}}(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle) \\
& = a|0\rangle_L + b|1\rangle_L.
\end{aligned} \tag{52}$$

[8]

(1) 9 個の量子ビットのうちの、先頭の 3 個の量子ビットについての量子回路を考えれば十分である。Fig. 3 の量子回路を考える。これは、3 量子ビットエラー訂正符号のビット反転エラー検出の原理と全く同じである。従って、Fig. 3 の量子回路は、問題 [5] で与えられた図の量子回路と、全く同様に動作する。

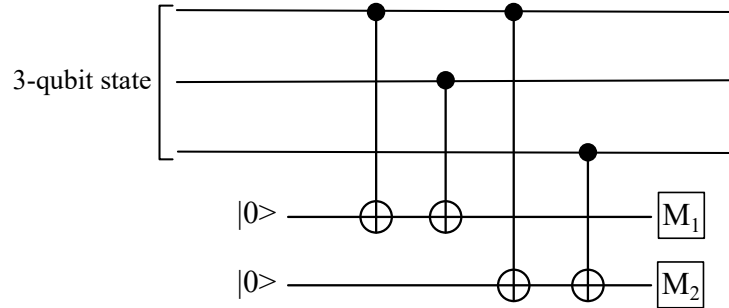


Figure 3: 1 番目の量子ビットの、ビット反転エラーを検出する量子回路

(2) 第 1 ブロックに注目する。 $|0\rangle_L, |1\rangle_L$ の第 1 ブロックは、それぞれ、 $|000\rangle + |111\rangle, |000\rangle - |111\rangle$ で与えられる。1 番目の量子ビットの位相反転は、 $|0\rangle \rightarrow |0\rangle, |1\rangle \rightarrow -|1\rangle$ という変換を引き起こす。このとき、以下の変換が引き起こされる。

$$|000\rangle \rightarrow |000\rangle, \quad |111\rangle \rightarrow -|111\rangle. \tag{53}$$

これは、

$$|000\rangle \pm |111\rangle \rightarrow |000\rangle \mp |111\rangle, \tag{54}$$

という変換に相当し、 $|\psi\rangle_L \rightarrow |\psi''\rangle_L$ が実現される。

(3) まず、第1ブロックの三つの量子ビットに Hadamard ゲートを作用させることを考える。

$$\begin{aligned} |0\rangle|0\rangle|0\rangle &\xrightarrow{H\otimes H\otimes H} |+\rangle|+\rangle|+\rangle, \\ |1\rangle|1\rangle|1\rangle &\xrightarrow{H\otimes H\otimes H} |-\rangle|-\rangle|-\rangle. \end{aligned} \quad (55)$$

ところで、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|+\rangle|+\rangle + |-\rangle|-\rangle|-\rangle) \\ &= \frac{1}{4}[(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle) + (|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)] \\ &= \frac{1}{2}(|000\rangle + |011\rangle + |101\rangle + |110\rangle), \end{aligned} \quad (56)$$

が成り立つ。同様の計算により、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|+\rangle|+\rangle - |-\rangle|-\rangle|-\rangle) = \frac{1}{2}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |111\rangle), \quad (57)$$

を得る。第2, 3ブロックでも同様のことが成り立つ。今、第1ブロックの第1番目の量子ビットが位相反転したとする。これにより、 $|0\rangle_L, |1\rangle_L$ の第1ブロックの状態は $(1/\sqrt{2})(|000\rangle \mp |111\rangle)$ となる。これに対して $H \otimes H \otimes H$ を作用させると

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+++ \rangle \mp |--- \rangle), \quad (58)$$

となる。そのため、 $|\psi''\rangle_L$ に $H^{\otimes 9}$ を作用させると、以下の状態に変換される。

$$\begin{aligned} |\psi''\rangle_L &\xrightarrow{H^{\otimes 9}} a(|+++ \rangle - |--- \rangle)(|+++ \rangle + |--- \rangle)(|+++ \rangle + |--- \rangle) \\ &\quad + b(|+++ \rangle + |--- \rangle)(|+++ \rangle - |--- \rangle)(|+++ \rangle - |--- \rangle). \end{aligned} \quad (59)$$

式 (59) の右辺第1項の第1, 2ブロックは次のように書ける。

$$\begin{aligned} &(|+++ \rangle - |--- \rangle)(|+++ \rangle + |--- \rangle) \\ &\propto (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |011\rangle + |101\rangle + |110\rangle). \end{aligned} \quad (60)$$

よって、問題文中の図のように、第1, 2ブロックと補助量子ビットの間で合計6個の CNOT ゲートを作用させると、第1, 2ブロック内の奇数個の $|1\rangle$ が効いて、 M_1 は $|1\rangle$ となる。式 (59) の右辺の第2項の第1, 2ブロックは次のように書ける。

$$\begin{aligned} &(|+++ \rangle + |--- \rangle)(|+++ \rangle - |--- \rangle) \\ &\propto (|000\rangle + |011\rangle + |101\rangle + |110\rangle)(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |111\rangle). \end{aligned} \quad (61)$$

すると、前と同様の理由で M_1 は $|1\rangle$ となる。式 (59) の右辺の第1項の第2, 3ブロックは次のように書ける。

$$\begin{aligned} &(|+++ \rangle + |--- \rangle)(|+++ \rangle + |--- \rangle) \\ &\propto (|000\rangle + |011\rangle + |101\rangle + |110\rangle)(|000\rangle + |011\rangle + |101\rangle + |110\rangle). \end{aligned} \quad (62)$$

よって、問題文中の図のように、第2, 3ブロックと補助量子ビットの間で合計6個の CNOT ゲートを作用させると、第2, 3ブロック内の偶数個の $|1\rangle$ が効いて、 M_2 は $|0\rangle$ となる。式 (59) の右辺の第2項の第2, 3ブロックは次のように書ける。

$$\begin{aligned} & (|++\rangle - |--\rangle)(|++\rangle - |--\rangle) \\ & \propto (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |111\rangle)(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |111\rangle). \end{aligned} \quad (63)$$

すると、前と同様の理由で M_2 は $|0\rangle$ となる。結局、 $M_1 = 1$, $M_2 = 0$ が得られる。位相エラーが生じていない場合、 $M_1 = 0$, $M_2 = 0$ となるのは、これまでの説明から明らかである。よって、位相エラーが検出できた。問題文中の図の最後で、9個の量子ビット全てに Hadamard ゲートを作用させている。これにより、 $|+\rangle \rightarrow |0\rangle$, $|-\rangle \rightarrow |1\rangle$ と変換され、元の $|\psi''\rangle_L$ に回復される。 $|\psi''\rangle_L$ に対してエラー訂正を行って $|\psi\rangle_L$ に戻したい。これは、結局、第1ブロックを、

$$|000\rangle \mp |111\rangle \rightarrow |000\rangle \pm |111\rangle, \quad (64)$$

と変換すれば良いことを意味する。そこで、例えば、 $|\psi''\rangle_L$ の先頭の3量子ビットに対して、Fig. 4 の量子回路を作用させれば良いことになる。

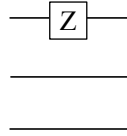


Figure 4: 位相反転エラーを訂正する量子回路

(4) 先頭の量子ビットに任意の 1-qubit エラー U が作用したとする。このとき、 $|0\rangle_L$, $|1\rangle_L$ は次の状態に変換される。

$$\begin{aligned} U|0\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{8}} \{ \text{Re}[\alpha](|000\rangle + |111\rangle) + i\text{Im}[\beta][(X|0\rangle|00\rangle + (X|1\rangle)|11\rangle] \\ &\quad + \text{Re}[\beta][(ZX|0\rangle|00\rangle + (ZX|1\rangle)|11\rangle] + i\text{Im}[\alpha][(Z|0\rangle|00\rangle + (Z|1\rangle)|11\rangle] \} \\ &\quad \otimes (|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle), \\ U|1\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{8}} \{ \text{Re}[\alpha](|000\rangle - |111\rangle) + i\text{Im}[\beta][(X|0\rangle|00\rangle - (X|1\rangle)|11\rangle] \\ &\quad + \text{Re}[\beta][(ZX|0\rangle|00\rangle - (ZX|1\rangle)|11\rangle] + i\text{Im}[\alpha][(Z|0\rangle|00\rangle - (Z|1\rangle)|11\rangle] \} \\ &\quad \otimes (|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle). \end{aligned} \quad (65)$$

1 番目の量子ビットのビット反転エラーを問題 [8](1) の方法で検出すると、 $U|0\rangle_L$, $U|1\rangle_L$ は規格化係数を無視すると次の状態に収縮する。

$$\begin{aligned} U|0\rangle_L &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} \{ i\text{Im}[\beta][(X|0\rangle|00\rangle + (X|1\rangle)|11\rangle] + \text{Re}[\beta][(ZX|0\rangle|00\rangle + (ZX|1\rangle)|11\rangle] \} \\ &\quad \otimes (|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle), \\ U|1\rangle_L &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} \{ i\text{Im}[\beta][(X|0\rangle|00\rangle - (X|1\rangle)|11\rangle] + \text{Re}[\beta][(ZX|0\rangle|00\rangle - (ZX|1\rangle)|11\rangle] \} \\ &\quad \otimes (|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle). \end{aligned} \quad (66)$$

そこで、1 番目の量子ビットのビット反転エラーを訂正するために、1 番目の量子ビットに X ゲートを作用させる。 $XX = I$, $XZX = -Z$ に注意すると、 $U|0\rangle_L$, $U|1\rangle_L$ は次の状態に変換される。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{8}} \{i\text{Im}[\beta](|000\rangle + |111\rangle) - \text{Re}[\beta][(Z|0\rangle|00\rangle + (Z|1\rangle)|11\rangle)\} \\ & \quad \otimes (|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle), \\ & \frac{1}{\sqrt{8}} \{i\text{Im}[\beta](|000\rangle - |111\rangle) - \text{Re}[\beta][(Z|0\rangle|00\rangle - (Z|1\rangle)|11\rangle)\} \\ & \quad \otimes (|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle). \end{aligned} \quad (67)$$

次に、1 番目の量子ビットの位相反転エラーを (3) の方法で検出すると、上記の二つの状態は、規格化係数を無視すると、次の二つの状態に収縮する。

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\sqrt{8}} \text{Re}[\beta][(Z|0\rangle)|00\rangle + (Z|1\rangle)|11\rangle](|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle), \\ & -\frac{1}{\sqrt{8}} \text{Re}[\beta][(Z|0\rangle)|00\rangle - (Z|1\rangle)|11\rangle](|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle). \end{aligned} \quad (68)$$

そこで、1 番目の量子ビットに Z を作用させると、元の $|0\rangle_L$, $|1\rangle_L$ に戻すことが出来る。このように、 $|0\rangle_L$, $|1\rangle_L$ にビット反転、位相反転が同時に生じててもエラー訂正可能である。そして、任意の 1-qubit エラー U が、問題 [6](4) のように、ビット反転、位相反転の混在した形で与えられても、補助量子ビットの観測による波束の収縮を使ってエラー訂正可能である。さらに重要なのは、 $|0\rangle_L$ と $|1\rangle_L$ の重ね合わせ状態である $|\psi\rangle_L = a|0\rangle_L + b|1\rangle_L$ でも、同様の操作でエラー訂正可能ということである。従って、9 量子ビットエラー訂正符号 $\{|0\rangle_L, |1\rangle_L\}$ は任意の 1 量子ビットエラー訂正可能であると結論できる。

[9]

(1) 符号状態 $\{|jk\rangle_L : j, k \in \{0, 1\}\}$ は、 $|l_1 l_2 l_3 l_4\rangle$ 、ただし、 $l_1 \oplus l_2 \oplus l_3 \oplus l_4 = 0$ という基底ベクトルの重ね合わせである。従って、ビット反転が起こっていない場合、必ず $M = |0\rangle$ となる。しかし、もし 4 個の物理量子ビットのうち、1 個がビット反転すると、エラーの生じた状態は $|l_1 l_2 l_3 l_4\rangle$ 、ただし、 $l_1 \oplus l_2 \oplus l_3 \oplus l_4 = 1$ という基底ベクトルの重ね合わせとなり、その結果、 $M = |1\rangle$ となる。従って、1 個のビット反転エラーは検出可能である。

(2) $|00\rangle_L$ に $H^{\otimes 4}$ を作用させると、以下の状態に変換される。

$$\begin{aligned} |00\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1111\rangle) \\ &\xrightarrow{H^{\otimes 4}} \frac{1}{4\sqrt{2}} [(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle) \\ &\quad + (|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0000\rangle + |0011\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle \\ &\quad + |1001\rangle + |1010\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle). \end{aligned} \quad (69)$$

同様にして、 $|01\rangle_L$, $|10\rangle_L$, $|11\rangle_L$ は、次のように変換される。

$$\begin{aligned}
|01\rangle_L &\xrightarrow{H^{\otimes 4}} \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0000\rangle + |0011\rangle - |0101\rangle - |0110\rangle \\
&\quad - |1001\rangle - |1010\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle), \\
|10\rangle_L &\xrightarrow{H^{\otimes 4}} \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0000\rangle - |0011\rangle + |0101\rangle - |0110\rangle \\
&\quad - |1001\rangle + |1010\rangle - |1100\rangle + |1111\rangle), \\
|11\rangle_L &\xrightarrow{H^{\otimes 4}} \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0000\rangle - |0011\rangle - |0101\rangle + |0110\rangle \\
&\quad + |1001\rangle - |1010\rangle - |1100\rangle + |1111\rangle). \tag{70}
\end{aligned}$$

上記の四つの変換後の状態は、 $|l_1 l_2 l_3 l_4\rangle$ 、ただし、 $l_1 \oplus l_2 \oplus l_3 \oplus l_4 = 0$ というベクトルの重ね合わせである。従って、位相反転が起こっていない場合、必ず $M = |0\rangle$ となる。問題文中の量子回路の図の最後で、 $H^{\otimes 4}$ を作用させているのは、元の状態に戻すためである。もし第1番目の物理量子ビットに位相反転が生じると、

$$|00\rangle_L \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle - |1111\rangle), \tag{71}$$

となる。これに、 $H^{\otimes 4}$ を作用させると、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\sqrt{2}}[(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle) \\
&\quad - (|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0001\rangle + |0010\rangle + |0100\rangle + |1000\rangle \\
&\quad + |0111\rangle + |1011\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle), \tag{72}
\end{aligned}$$

となり、これは、 $|l_1 l_2 l_3 l_4\rangle$ 、ただし、 $l_1 \oplus l_2 \oplus l_3 \oplus l_4 = 1$ というベクトルの重ね合わせとなる。従って、 $M = |1\rangle$ となる。 $|01\rangle_L$, $|10\rangle_L$, $|11\rangle_L$ についても同様のことが起こり、 $M = |1\rangle$ となる。今までの話は第1番目の物理量子ビットに位相反転エラーが生じた場合だったが、2, 3, 4番目の物理量子ビットに位相反転が生じていても同様である。よって、1個の物理量子ビットの位相反転は検出可能である。

(3) 例えば、 $|00\rangle_L$ の第1番目の物理量子ビットでビット反転が生じると、次のベクトルに変化する。

$$|00\rangle_L \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|1000\rangle + |0111\rangle). \tag{73}$$

一方、例えば、 $|01\rangle_L$ の第2番目の物理量子ビットでビット反転が生じると、次のベクトルに変化する。

$$|01\rangle_L \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|1000\rangle + |0111\rangle). \tag{74}$$

式(73), (74)の右辺は、全く同じ状態である。従って、元の状態に回復しようにも、 $|00\rangle_L$ と $|01\rangle_L$ のどちらにすべきか判定できない。よって、エラー訂正不可能である。