

量子コンピュータ設計へ向けた量子情報入門

練習問題 (作成者 吾妻広夫)

Basics 3

3.1 ハミング符号の量子情報への拡張

[1] No-cloning theorem について考える。未知の任意の状態 $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ をコピーするユニタリ演算子 U として、次のものを仮定する。ただし、 a, b は任意の複素数で、 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ を満たすとする。

$$U|\psi\rangle \otimes |0\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle. \quad (1)$$

この U が、 $|\psi\rangle$ とは異なる状態 $|\phi\rangle = a'|0\rangle + b'|1\rangle$ もコピーできるとすると、以下が成立するはずである。ただし、 a', b' も任意の複素数で、 $|a'|^2 + |b'|^2 = 1$ を満たすとする。

$$U|\phi\rangle \otimes |0\rangle = |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle. \quad (2)$$

(1) 式 (1), (2) の左右両辺で内積を取ると、次の関係式が得られることを示せ。

$$\langle\phi|\psi\rangle = (\langle\phi|\psi\rangle)^2. \quad (3)$$

(2) (1) の結果より、未知の任意の状態 $|\psi\rangle$ をコピーする U は存在しないことを説明せよ。

[2] 3 量子ビットの符号化をする量子回路について考える。

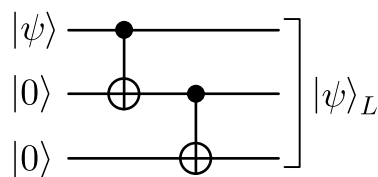


Figure 1: 3 量子ビットの符号化をする量子回路

(1) Fig. 1 において、 $|\psi\rangle = |0\rangle$ として $|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$ を入力した場合、出力状態 $|\psi\rangle_L$ はどのようなものになるか答えよ。

(2) Fig. 1 において、 $|\psi\rangle = |1\rangle$ として $|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$ を入力した場合、出力状態 $|\psi\rangle_L$ はどのようなものになるか答えよ。

(3) Fig. 1において、 $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ として $|\psi\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$ を入力した場合、出力状態 $|\psi\rangle_L$ はどのようなものになるか答えよ。

(4) Fig. 1 の出力状態 $|\psi\rangle_L$ を元の状態 $|\psi\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$ に戻す量子回路がどのようなものになるか答えよ。

[3] 3量子ビット符号のエラー訂正操作について考える。Fig. 2の量子回路でエラー検出を行うとする。 $|\psi\rangle_1 = a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1$ という状態を入力したとする。ただし、 a, b は任意の複素数で、 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ を満たすとする。Fig. 2の error の部分において、1番目の量子ビットに、 2×2 ユニタリ行列

$$U_1 = \begin{pmatrix} \gamma & i\delta \\ i\delta & \gamma \end{pmatrix}, \quad (4)$$

ただし、 γ, δ は実数で、 $\gamma^2 + \delta^2 = 1$ 、がエラーとして作用したとする。ここで、基底ベクトルの取り方は、

$$|0\rangle_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

とする。

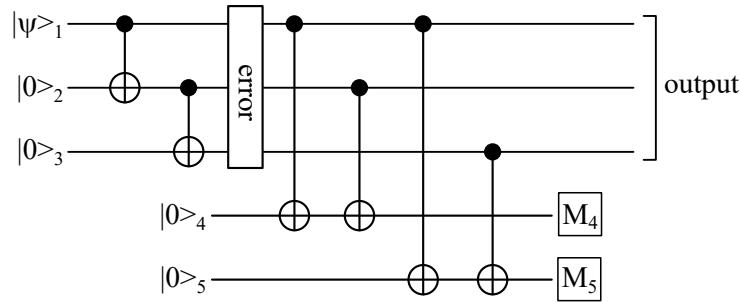


Figure 2: 3量子ビット符号のエラーを検出する量子回路

(1) Fig. 2の四角の箱 M_4, M_5 は、4番目、5番目の量子ビットを $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基底で測定するデバイスで、 $|0\rangle$ を検出したら '0' を、 $|1\rangle$ を検出したら '1' を出力するとする。 $M_4 = 0, M_5 = 0$ が測定される確率、および、その時に output として出力される状態を答えよ。

(2) $M_4 = 1, M_5 = 1$ が測定される確率、および、その時に output として出力される状態を答えよ。また、この場合、エラーが含まれた状態が出力されることになるが、このエラーを訂正する量子回路を図に描け。

3.2 量子誤りの離散化

[4] 3量子ビットのエラー訂正符号

$$|\psi\rangle_L = a|000\rangle + b|111\rangle, \quad (6)$$

に対して、次のエラーを引き起こすユニタリ演算子を考える。エラーの起こった状態を $|\psi\rangle_E$ として、

$$|\psi\rangle_E = E|\psi\rangle_L, \quad (7)$$

$$E = U^{\otimes 3} = [(\cos \epsilon)\mathbf{I} + i(\sin \epsilon)X]^{\otimes 3}, \quad (8)$$

ただし、

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

とする。

(1)

$$U^{\otimes 3} = c_0\mathbf{III} + c_1(X\mathbf{II} + \mathbf{IXI} + \mathbf{IIX}) + c_2(XX\mathbf{I} + X\mathbf{IX} + \mathbf{IXX}) + c_3XXX, \quad (11)$$

として、 c_0, c_1, c_2, c_3 を求めよ。

(2) $|\psi\rangle_L = |000\rangle$ として、 $|\psi\rangle_E$ を観測して $|000\rangle$ を得る確率 P_0 、 $|\psi\rangle_E$ を観測して 1 個の量子ビットが反転している状態を得る確率 P_1 、 $|\psi\rangle_E$ を観測して 2 個の量子ビットが反転している状態を得る確率 P_2 、 $|\psi\rangle_E$ を観測して $|111\rangle$ を得る確率 P_3 を求めよ。

(3) 1 個の量子ビットに U が作用した場合、ビットが反転する確率が $p = \sin^2 \epsilon$ であることを示せ。また、 P_0, P_1, P_2, P_3 を p で書き表せ。

[5]

(1) 3 量子ビットのエラー訂正符号

$$|\psi\rangle_L = a|000\rangle + b|111\rangle, \quad (12)$$

に対して、前の練習問題 [4] のエラーを引き起こすユニタリ演算子 $E = U^{\otimes 3}$ が作用したとする。ただし、 a, b は任意の複素数で、 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ とする。その結果得られる $E|\psi\rangle_L$ を、基底ベクトル $\{|jkl\rangle : j, k, l \in \{0, 1\}\}$ で展開した形で書き下せ。ただし、係数 c_0, c_1, c_2, c_3 は使って良いとする。

(2) $E|\psi\rangle_L$ に補助量子ビット $|0\rangle|0\rangle$ を付け加えて、Fig. 3 の量子回路でパリティを計算するとする。output として出力される状態を答えよ。

(3) (2) で求めた出力状態に対して補助量子ビットを測定して、 $|0\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle, |1\rangle|0\rangle, |1\rangle|1\rangle$ が得られた場合、符号化された 3 個の量子ビットがどのような状態に収縮するか答えよ。ただし、収縮した状態は規格化されていなくても良いとする。このことから、この 3 量子ビットエラー訂正符号が、2 個以上のビット反転エラーを訂正できないことを説明しなさい。

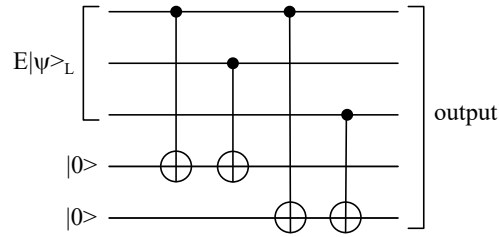


Figure 3: 3量子ビット符号のパリティを検出する量子回路

[6] 位相反転エラーを訂正する量子エラー訂正符号を考える。まず、ビット反転エラーについて復習する。基底ベクトル

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

に対して、

$$X = 2\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

という演算子を考える。任意の量子状態 $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ に偶発的に X が作用して、

$$|\psi\rangle \rightarrow X|\psi\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle, \quad (15)$$

と変換された場合、「ビット反転エラーが起こった」と言う。これと同じ考え方で、

$$Z = 2\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

は位相反転エラーを起こすと考えられる。

(1) $Z|0\rangle, Z|1\rangle$ を求めよ。

(2) ビット反転は、

$$X|j\rangle = |j \oplus 1\rangle \quad \text{for } j \in \{0, 1\}, \quad (17)$$

と書ける。ただし、 $j \oplus k$ は $j + k$ を 2 で割った余りを表すとする。これと同様の書き方で位相反転は、

$$Z|j\rangle = e^{ij\pi}|j\rangle \quad \text{for } j \in \{0, 1\}, \quad (18)$$

と書けることを示しなさい。

(3) 次の二つの基底ベクトルを考える。

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \end{aligned} \quad (19)$$

このとき、 $\langle ++ \rangle = \langle -- \rangle = 1$, $\langle + - \rangle = \langle - + \rangle = 0$, $Z|+ \rangle = |- \rangle$, $Z|- \rangle = |+ \rangle$ を確かめよ。

(4) 任意の 2×2 ユニタリ行列は、次の形で与えられる。

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}. \quad (20)$$

ただし、 α, β は任意の複素数で、 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ とする。この U が、

$$\begin{aligned} U &= \text{Re}[\alpha] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\text{Im}[\alpha] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\text{Re}[\beta] \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + i\text{Im}[\beta] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{Re}[\alpha]\mathbf{I} + i\text{Im}[\beta]X + i\text{Re}[\beta]Y + i\text{Im}[\alpha]Z, \end{aligned} \quad (21)$$

と分解できることを示せ。ただし、 $\alpha = x + iy$ として、 $\text{Re}[\alpha] = x$, $\text{Im}[\alpha] = y$ とする。また、 $Y = -iZX$ を示せ。これにより、 U は、エラーがない場合、ビット反転エラーが起こった場合、位相反転エラーが起こった場合、および、ビット反転エラーと位相反転エラーが同時に起こった場合の、4通りの和となることを説明せよ。

[7] 9量子ビットエラー訂正符号の生成方法を考える。9量子ビットエラー訂正符号は次で与えられる。

$$\begin{aligned} |0\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{8}}(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle), \\ |1\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{8}}(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle). \end{aligned} \quad (22)$$

任意の1量子ビット $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ を $|\psi\rangle_L = a|0\rangle_L + b|1\rangle_L$ に符号化する方法について考える。ただし、 a, b は任意の複素数で、 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ を満たすものとする。

(1) Fig. 4 の量子回路が、

$$|\psi\rangle|0\rangle|0\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle)|0\rangle|0\rangle, \quad (23)$$

を

$$\frac{a}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) + \frac{b}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle), \quad (24)$$

に変換することを示せ。ただし、 H は Hadamard ゲートで、 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ を基底とした行列表現で、

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

として与えられるとする。

(2) Fig. 5 の量子回路が、

$$\begin{aligned} |\psi\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle &= (a|0\rangle + b|1\rangle)|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle \\ \rightarrow a|0\rangle_L + b|1\rangle_L, \end{aligned} \quad (26)$$

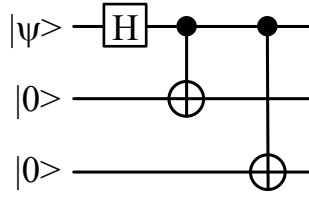


Figure 4: 9 量子ビット符号の中に含まれる一つのブロックを符号化する量子回路

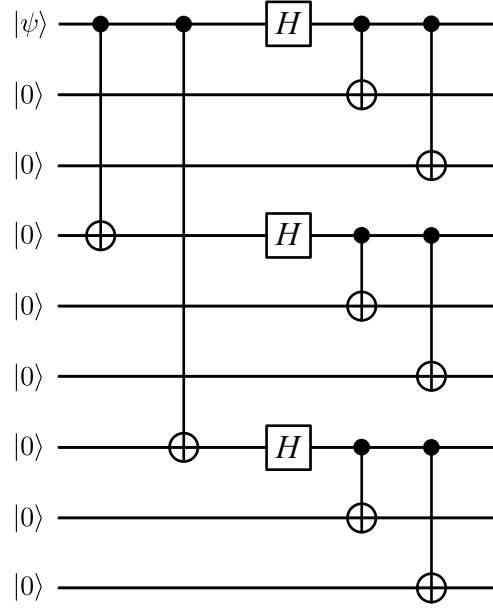


Figure 5: 9 量子ビット符号化のための量子回路

という変換を引き起こすことを示せ。

[8] 9 量子ビットエラー訂正符号によるエラー訂正方法の実際について考える。9 量子ビットエラー訂正符号は次で与えられる。

$$\begin{aligned}
 |0\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{8}}(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle), \\
 |1\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{8}}(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle).
 \end{aligned} \tag{27}$$

(1) 1 番目の量子ビットでビット反転が生じて、 $|\psi\rangle_L = a|0\rangle_L + b|1\rangle_L$ が、 $|\psi'\rangle_L = a|0'\rangle_L + b|1'\rangle_L$ 、ただし、

$$\begin{aligned}
 |0'\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{8}}(|100\rangle + |011\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle), \\
 |1'\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{8}}(|100\rangle - |011\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle).
 \end{aligned} \tag{28}$$

に変換されたとする。また、 a, b は任意の複素数で、 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ を満たすとする。このエラーを検出する量子回路を答えよ。

(2) 1 番目の量子ビットで位相反転が生じると、 $|\psi\rangle_L$ が $|\psi''\rangle_L = a|0''\rangle_L + b|1''\rangle_L$ 、ただし、

$$\begin{aligned} |0''\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{8}}(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle), \\ |1''\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{8}}(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle). \end{aligned} \quad (29)$$

と変換されることを示せ。

(3) $|\psi''\rangle_L$ のエラーを検出する量子回路は、Fig. 6 で与えられる。 $|\psi''\rangle_L$ の位相反転がこの量子回路で検出できることを説明せよ。また、この場合の位相反転エラーを訂正する量子回路を答えよ。

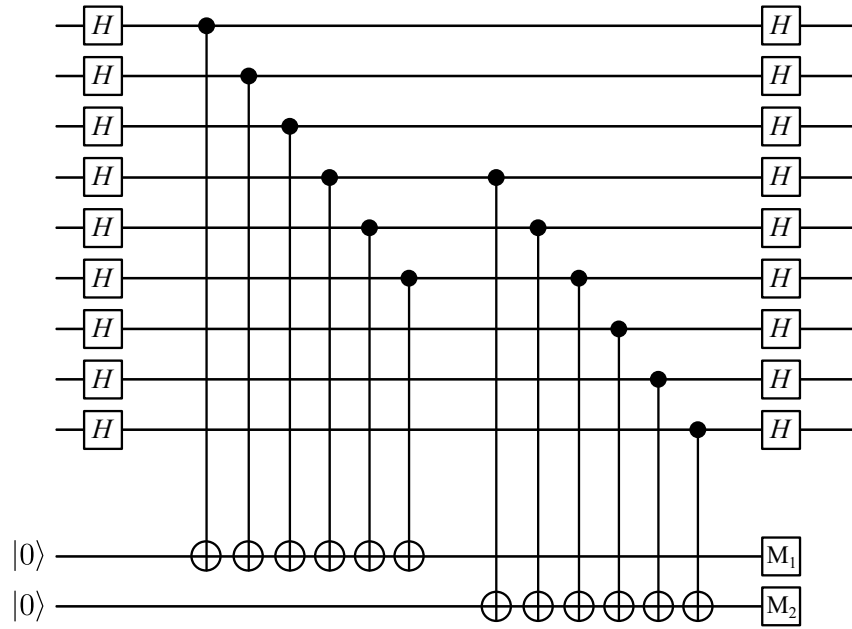


Figure 6: 9 量子ビット符号の位相反転エラー検出のための量子回路

(4) $|0\rangle_L, |1\rangle_L$ に問題 [6](4) で与えられた任意の 1 量子ビットエラー

$$\begin{aligned} U &= \text{Re}[\alpha]\mathbf{I} + i\text{Im}[\beta]X + i\text{Re}[\beta]Y + i\text{Im}[\alpha]Z \\ &= \text{Re}[\alpha]\mathbf{I} + i\text{Im}[\beta]X + \text{Re}[\beta]ZX + i\text{Im}[\alpha]Z, \end{aligned} \quad (30)$$

が生じたとする。このように、ビット反転エラー、位相反転エラーが混在した場合でも、 $|0\rangle_L, |1\rangle_L$ はエラー検出、訂正が可能であることを説明せよ。

[9] 四つの物理量子ビットを用いて、以下の論理量子ビットを定義する。

$$\begin{aligned}
 |00\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1111\rangle), \\
 |01\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1100\rangle + |0011\rangle), \\
 |10\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1010\rangle + |0101\rangle), \\
 |11\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0110\rangle + |1001\rangle).
 \end{aligned} \tag{31}$$

このエラー訂正符号は、任意の1量子ビットのエラーは検出できるが、エラー訂正は出来ないことを示したい。

(1) Fig. 7 の量子回路で1個の物理量子ビットのビット反転を検出できる事を説明せよ。ただし、符号化された任意の状態を、 $|\psi\rangle_L = a|00\rangle_L + b|01\rangle_L + c|10\rangle_L + d|11\rangle_L$ 、 a, b, c, d は任意の複素数、 $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$ とする。

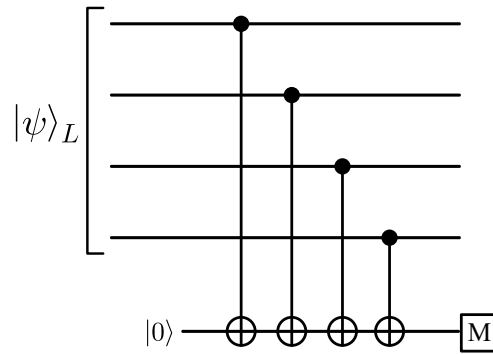


Figure 7: 4 量子ビット符号のビット反転エラー検出のための量子回路

(2) Fig. 8 の量子回路で1個の物理量子ビットの位相反転を検出できる事を説明せよ。

(3) 1個の物理量子ビットにエラーが生じた場合、検出は出来ても、訂正は出来ないことを説明せよ。

練習問題 Basics 3 © 2026 by 吾妻広夫 is licensed under CC BY-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

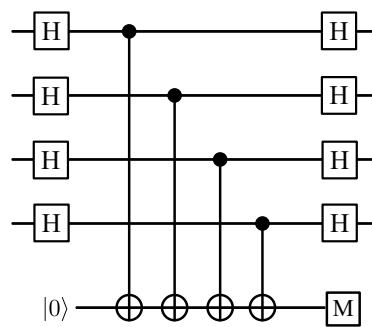


Figure 8: 4 量子ビット符号の位相反転エラー検出のための量子回路