量子コンピュータ設計へ向けた量子情報入門

練習問題の解答　(作成者　吾妻広夫)

Basics 2

2.1 数学的な準備

[1]
(1)

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= a\begin{pmatrix} 1\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ 0\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ 0\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ 1\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ 1\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} \\
&= a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

(2)

$$\langle\psi| = (a^*, b^*, c^*, d^*). \qquad (2)$$

(3)

$$\langle\psi|\psi\rangle = (a^*, b^*, c^*, d^*)\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2. \qquad (3)$$

一方、$\langle\psi|\psi\rangle = 1$ なので、$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$ を得る。

(4) ‘0’ と ‘1’ を N 個並べて得られる数の列を数え上げれば良い。

	N 個の数の列
1	0...000
$2 = 2^1$	0...001
3	0...010
$4 = 2^2$	0...011
5	0...100
6	0...101
7	0...110
$8 = 2^3$	0...111
$\vdots$	$\vdots$
2^N	1...111

よって、合計 2^N 個である。

(5)

$$\langle\psi| = \sum_{j=0}^{2^N-1} c_j^* \langle j|. \tag{4}$$

(6)

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= (\sum_{j=0}^{2^N-1} c_j^* \langle j|)(\sum_{k=0}^{2^N-1} c_k |k\rangle) \\ &= \sum_{j=0}^{2^N-1} \sum_{k=0}^{2^N-1} c_j^* c_k \langle j|k\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{2^N-1} \sum_{k=0}^{2^N-1} c_j^* c_k \delta_{jk} \\ &= \sum_{j=0}^{2^N-1} |c_j|^2. \end{aligned} \tag{5}$$

一方、$\langle\psi|\psi\rangle = 1$ より、

$$\sum_{j=0}^{2^N-1} |c_j|^2 = 1 \tag{6}$$

を得る。

[2]

$$|000\rangle = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad |001\rangle = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad |010\rangle = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad |011\rangle = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix},$$
$$|100\rangle = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad |101\rangle = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad |110\rangle = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \quad |111\rangle = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

[3]
(1)

$$YY^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}, \tag{8}$$

$$Y|\psi\rangle = Y(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ic_1 \\ ic_0 \end{pmatrix} = ic_0|1\rangle - ic_1|0\rangle. \tag{9}$$

(2)

$$ZZ^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}, \tag{10}$$

$$Z|\psi\rangle = Z(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ -c_1 \end{pmatrix} = c_0|0\rangle - c_1|1\rangle. \tag{11}$$

(3)

$$HH^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} H|\psi\rangle &= H(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c_0 + c_1 \\ c_0 - c_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(c_0 + c_1)|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(c_0 - c_1)|1\rangle. \end{aligned} \tag{13}$$

(4)

$$SS^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}, \tag{14}$$

$$S|\psi\rangle = S(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ -ic_1 \end{pmatrix} = c_0|0\rangle - ic_1|1\rangle. \tag{15}$$

(5)

$$TT^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}, \tag{16}$$

$$T|\psi\rangle = T(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ e^{i\pi/4}c_1 \end{pmatrix} = c_0|0\rangle + e^{i\pi/4}c_1|1\rangle. \tag{17}$$

[4]
(1)

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U|\psi(0)\rangle \\ &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle \\ &= i\hbar\left(-\frac{iH}{\hbar}\right)e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle \\ &= He^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle \\ &= H|\psi(t)\rangle. \end{aligned} \tag{18}$$

(2)

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= [\exp(-iHt/\hbar)]^\dagger \exp(-iHt/\hbar) \\ &= \exp(iH^\dagger t/\hbar)\exp(-iHt/\hbar) \\ &= \exp(iHt/\hbar)\exp(-iHt/\hbar) \\ &= \boldsymbol{I}. \end{aligned} \tag{19}$$

ただし、上の導出で $H^\dagger = H$ を使った。

$$\begin{aligned} \langle\psi(t)|\psi(t)\rangle &= [U|\psi(0)\rangle]^\dagger U|\psi(0)\rangle \\ &= \langle\psi(0)|U^\dagger U|\psi(0)\rangle \\ &= \langle\psi(0)|\psi(0)\rangle \\ &= 1. \end{aligned} \tag{20}$$

ただし、上の導出で、$U^\dagger U = \boldsymbol{I}$, $\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = 1$ を使った。

(3)

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^1 &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
U &= \exp(-iHt/\hbar) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[-\frac{i\Omega t}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{i\Omega t}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} [-i(\Omega t/2)]^n & 0 \\ 0 & [i(\Omega t/2)]^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\Omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Omega t/2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

(5)

$$
U_2^\dagger U_2 = \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta \\ \beta^* & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2+|\beta|^2 & 0 \\ 0 & |\alpha|^2+|\beta|^2 \end{pmatrix}. \tag{23}
$$

一方、$U_2^\dagger U_2 = \boldsymbol{I}$ より、$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ を得る。(4) で

$$
U = \begin{pmatrix} e^{-i\Omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Omega t/2} \end{pmatrix}, \tag{24}
$$

を得た。これは、$\alpha = e^{-i\Omega t/2}$, $\beta = 0$ として、

$$
U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha^* \end{pmatrix}, \tag{25}
$$

の形に書ける。また、

$$
|\alpha|^2+|\beta|^2 = |e^{-i\Omega t/2}|^2+|0|^2 = 1, \tag{26}
$$

も明らかである。

[5]
(1)

$$\begin{aligned} V^\dagger V &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{27}$$

以下も同様にして示せる。

$$VV^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

(2)

$$V\sigma_y V^\dagger = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}\right]\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

(3)

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\Omega t)^n}{n!}V^\dagger(V\sigma_y V^\dagger)^n V \\ &= V^\dagger\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\Omega t)^n}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n V \\ &= V^\dagger\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\begin{pmatrix} (-i\Omega t/2)^n & 0 \\ 0 & (i\Omega t/2)^n \end{pmatrix}V \\ &= V^\dagger\begin{pmatrix} e^{-i\Omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Omega t/2} \end{pmatrix}V \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\Omega t/2) - i\sin(\Omega t/2) & 0 \\ 0 & \cos(\Omega t/2) + i\sin(\Omega t/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\Omega t/2) & -\sin(\Omega t/2) \\ \sin(\Omega t/2) & \cos(\Omega t/2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{30}$$

ただし、上式の導出では公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を使った。

(4)

$$U = \exp(i\alpha\sigma_z)\exp(i\beta\sigma_y)\exp(i\gamma\sigma_z), \tag{31}$$

より、任意の 2×2 ユニタリ行列の形を指定するには、$\alpha,\,\beta,\,\gamma$ の 3 個のパラメータが必要と分かる。また、$\alpha=-\Omega t_1,\,\beta=-\Omega t_2,\,\gamma=-\Omega t_3$ より、$\alpha,\,\beta,\,\gamma$ は実数である。よって、任意の 2×2 ユニタリ行列を一意に指定するには 3 個の実パラメータが必要と分かる。

[6]
(1) まず、

$$|0\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad |1\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{32}$$

より、

$$\begin{aligned}
|0\rangle|0\rangle&=\begin{pmatrix}1\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\0\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad |0\rangle|1\rangle=\begin{pmatrix}1\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\0\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\\
|1\rangle|0\rangle&=\begin{pmatrix}0\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\1\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad |1\rangle|1\rangle=\begin{pmatrix}0\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\1\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{33}$$

であることに注意する。

$$\begin{aligned}
U_{\mathrm{CNOT}}|0\rangle|0\rangle &= \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=|0\rangle|0\rangle,\\
U_{\mathrm{CNOT}}|0\rangle|1\rangle &= \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=|0\rangle|1\rangle,\\
U_{\mathrm{CNOT}}|1\rangle|0\rangle &= \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=|1\rangle|1\rangle,\\
U_{\mathrm{CNOT}}|1\rangle|1\rangle &= \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=|1\rangle|0\rangle.
\end{aligned} \tag{34}$$

よって、

$$U_{\mathrm{CNOT}}|j\rangle|k\rangle=|j\rangle|j\oplus k\rangle, \tag{35}$$

が成立することが確かめられた。U_{CNOT} が $U_2\otimes U_2'$ と分解できたとする。すると、

$$U_{\mathrm{CNOT}}|j\rangle|k\rangle=U_2\otimes U_2'|j\rangle|k\rangle=(U_2|j\rangle)\otimes(U_2'|k\rangle), \tag{36}$$

という結果が得られる。よって、2 量子ビット目の $U_2'|k\rangle$ の出力は、値 j に依存しないことになる。しかし、実際には式 (35) で 2 量子ビット目は $|j\oplus k\rangle$ で、j と k の値に依存し

ている。これは矛盾で、このことから U_{CNOT} は $U_2 \otimes U_2'$ の形には分解できないことが理解される。

(2)

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{CZ}}|0\rangle|0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle|0\rangle, \\
U_{\mathrm{CZ}}|0\rangle|1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle|1\rangle, \\
U_{\mathrm{CZ}}|1\rangle|0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1\rangle|0\rangle, \\
U_{\mathrm{CZ}}|1\rangle|1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|1\rangle|1\rangle.
\end{aligned} \tag{37}
$$

よって、

$$
U_{\mathrm{CZ}}|j\rangle|k\rangle = (-1)^{jk}|j\rangle|k\rangle, \tag{38}
$$

となる。

(3)

$$
U_{\mathrm{CZ}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{I} \otimes H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \tag{39}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
& (\boldsymbol{I} \otimes H) U_{\mathrm{CZ}} (\boldsymbol{I} \otimes H) \\
= & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= U_{\mathrm{CNOT}}.
\end{aligned} \tag{40}
$$

よって、示せた。

(4) 図 1 で示されるゲートは、4×4 行列としては、次のように書ける。

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{41}
$$

図 2 で示されるゲートは、4×4 行列としては、次のように書ける。

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{42}
$$

よって、図 3 で示されるゲートの回路の、4×4 行列表現は、以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{43}
$$

ここで、

$$
V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{44}
$$

とする。すると、V は図 4 のゲート回路の 4×4 行列表現であることが示せる。このことは、以下から確認できる。

$$
V|0\rangle|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle|0\rangle,
$$

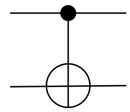

Figure 1:

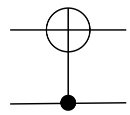

Figure 2:

$$
\begin{aligned}
V|0\rangle|1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1\rangle|0\rangle, \\
V|1\rangle|0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle|1\rangle, \\
V|1\rangle|1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle|1\rangle.
\end{aligned} \tag{45}
$$

よって、図 5 の関係が成立する。

2.3 Bloch 球を用いた表現

[7]
(1) $\Omega t = \beta$ とすれば、

$$
\exp(-i\Omega t\sigma_y) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t/2) & -\sin(\Omega t/2) \\ \sin(\Omega t/2) & \cos(\Omega t/2) \end{pmatrix}, \tag{46}
$$

から、

$$
\exp(-i\beta Y/2) = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix}, \tag{47}
$$

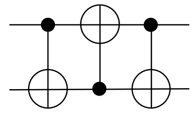

Figure 3:

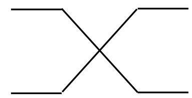

Figure 4:

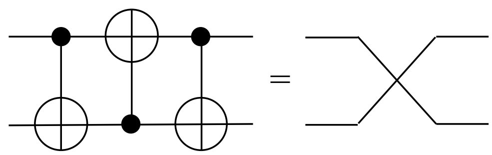

Figure 5:

を導出できる。さらに、

$$\begin{aligned}\exp(-i\beta Y/2)|0\rangle &= \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) \end{pmatrix} \\ &= \cos(\beta/2)|0\rangle + \sin(\beta/2)|1\rangle, \end{aligned} \tag{48}$$

が得られる。上式は角度 β だけで指定されていて、$\alpha = 0$ となっている。図 6 を見ると、このような状態は、Bloch 球上の xz 平面内にあることが理解される。

(2) 問題 [4](4) の結果において、$H = \hbar\Omega\sigma_z = \hbar\Omega Z/2$ とすれば、

$$\exp(-i\Omega t Z/2) = \begin{pmatrix} e^{-i\Omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Omega t/2} \end{pmatrix}, \tag{49}$$

を得る。上式に $\Omega t = \alpha$ を代入すれば、

$$\exp(-i\alpha Z/2) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}, \tag{50}$$

が得られる。すると、次が得られる。

$$\begin{aligned} &\exp(-i\alpha Z/2)\exp(-i\beta Y/2)|0\rangle \\ =& \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos(\beta/2) \\ e^{i\alpha/2}\sin(\beta/2) \end{pmatrix} \\ =& e^{-i\alpha/2}[\cos(\beta/2)|0\rangle + e^{i\alpha}\sin(\beta/2)|1\rangle]. \end{aligned} \tag{51}$$

上式において、状態全体にかかっている位相因子 $e^{-i\alpha/2}$ は無視できる。よって、Y 回転、Z 回転操作後の状態は、

$$\cos(\beta/2)|0\rangle + e^{i\alpha}\sin(\beta/2)|1\rangle, \tag{52}$$

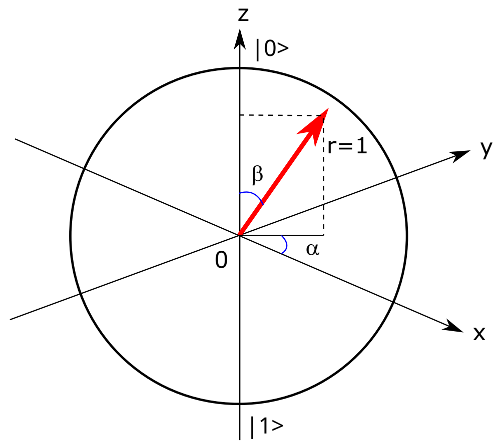

Figure 6:

である。この状態は、角度 α, β で指定されていて、Bloch 球表面上の任意の点を表していると言える。また、式 (52) は、1 量子ビットの任意の状態を表している。

(3)

$$
\begin{aligned}
\langle +'|+'\rangle &= \left[\frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|)\right]\left[\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right] = \frac{1}{2}(\langle 0| + \langle 1|)(|0\rangle + |1\rangle) \\
&= 1, \\
\langle +'|-\rangle &= \left[\frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right] = \frac{e^{-i\theta}}{2}(\langle 0| + \langle 1|)(|0\rangle - |1\rangle) \\
&= 0. \qquad (53)
\end{aligned}
$$

$\langle -|+'\rangle = 0$ も同様にして示せる。従って、$|+\rangle$ を $|+'\rangle$ に変更しても、特に物理的な状況は変化しない。よって、波動関数全体に掛かる global phase $e^{i\theta}$ は、物理的な状態を変化させないと言える。

(4)

$$
\begin{aligned}
|\psi_\perp\rangle &= \cos[(\pi-\beta)/2]|0\rangle + e^{i(\pi+\alpha)}\sin[(\pi-\beta)/2]|1\rangle \\
&= \sin(\beta/2)|0\rangle - e^{i\alpha}\cos(\beta/2)|1\rangle. \qquad (54)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_\perp|\psi\rangle &= [\sin(\beta/2)\langle 0| - e^{-i\alpha}\cos(\beta/2)\langle 1|][\cos(\beta/2)|0\rangle + e^{i\alpha}\sin(\beta/2)|1\rangle] \\
&= \sin(\beta/2)\cos(\beta/2)(\langle 0|0\rangle - \langle 1|1\rangle) \\
&= 0. \qquad (55)
\end{aligned}
$$

2.4 重ね合わせ状態

[8]
(1)

$$
|\psi(\alpha+\epsilon,\beta)\rangle = \cos(\beta/2)|0\rangle + e^{i(\alpha+\epsilon)}\sin(\beta/2)|1\rangle. \qquad (56)
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
F(\alpha,\beta,\epsilon) &= \left|[\cos(\beta/2)\langle 0| + e^{-i(\alpha+\epsilon)}\sin(\beta/2)\langle 1|][\cos(\beta/2)|0\rangle + e^{i\alpha}\sin(\beta/2)|1\rangle]\right|^2 \\
&= \left|\cos^2(\beta/2) + e^{-i\epsilon}\sin^2(\beta/2)\right|^2 \\
&= [\cos^2(\beta/2) + e^{-i\epsilon}\sin^2(\beta/2)][\cos^2(\beta/2) + e^{i\epsilon}\sin^2(\beta/2)] \\
&= \cos^4(\beta/2) + (e^{i\epsilon} + e^{-i\epsilon})\cos^2(\beta/2)\sin^2(\beta/2) + \sin^4(\beta/2) \\
&= \cos^4(\beta/2) + 2\cos\epsilon\cos^2(\beta/2)\sin^2(\beta/2) + \sin^4(\beta/2). \qquad (57)
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
F(\pi/4,\pi/4,0) &= 1, \\
F(\pi/4,\pi/4,0.05) &\fallingdotseq 0.9997, \\
F(\pi/4,\pi/4,0.1) &\fallingdotseq 0.9988. \qquad (58)
\end{aligned}
$$

ϵ が 0 から大きくなるにつれて、$F(\pi/4,\pi/4,\epsilon)$ が、1 から次第に小さくなって行くことが分かる。

(4)

$$
|\psi(\alpha,\beta+\epsilon)\rangle = \cos[(\beta+\epsilon)/2]|0\rangle + e^{i\alpha}\sin[(\beta+\epsilon)/2]|1\rangle. \qquad (59)
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
F'(\alpha,\beta,\epsilon) &= \big|\{\cos[(\beta+\epsilon)/2]\langle 0| + e^{-i\alpha}\sin[(\beta+\epsilon)/2]\langle 1|\} \\
&\quad \times [\cos(\beta/2)|0\rangle + e^{-i\alpha}\sin(\beta/2)|1\rangle]\big|^2 \\
&= |\cos[(\beta+\epsilon)/2]\cos(\beta/2) + \sin[(\beta+\epsilon)/2]\sin(\beta/2)|^2 \\
&= \cos^2[(\beta+\epsilon)/2]\cos^2(\beta/2) \\
&\quad +2\cos[(\beta+\epsilon)/2]\cos(\beta/2)\sin[(\beta+\epsilon)/2]\sin(\beta/2) \\
&\quad +\sin^2[(\beta+\epsilon)/2]\sin^2(\beta/2). \qquad (60)
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
F'(\pi/4,\pi/4,0) &= 1, \\
F'(\pi/4,\pi/4,0.05) &\fallingdotseq 0.9994, \\
F'(\pi/4,\pi/4,0.1) &\fallingdotseq 0.9975. \qquad (61)
\end{aligned}
$$

ϵ が 0 から大きくなるにつれて、$F'(\pi/4,\pi/4,\epsilon)$ が、1 から次第に小さくなって行くことが分かる。