量子コンピュータ設計へ向けた量子情報入門

練習問題　(作成者　吾妻広夫)

Basics 2

2.1 数学的な準備

[1] 1 量子ビットの状態 $|0\rangle, |1\rangle$ を、次のように 2 成分縦ベクトルで表現する。

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(1) 次の状態を 4 成分縦ベクトルで表示せよ。

$$|\psi\rangle = a|0\rangle \otimes |0\rangle + b|0\rangle \otimes |1\rangle + c|1\rangle \otimes |0\rangle + d|1\rangle \otimes |1\rangle, \tag{2}$$

ただし、a, b, c, d は任意の複素数とする。

(2) $|\psi\rangle$ と共役なベクトル $\langle\psi|$ を、4 成分横ベクトルで表示せよ。

(3) $|\psi\rangle$ を規格化すると、すなわち、$\langle\psi|\psi\rangle = 1$ とすると、

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1, \tag{3}$$

が得られることを示せ。

(4) N 量子ビットの基底ベクトル $|0\cdots00\rangle$, $|0\cdots01\rangle$, $|0\cdots10\rangle$, $|0\cdots11\rangle$, ..., $|1\cdots11\rangle$ が合計 2^N 個あることを示せ。

(5) N 量子ビットの任意の状態を、

$$|\psi\rangle = \sum_{j=0}^{2^N-1} c_j|j\rangle, \tag{4}$$

と書くことにする。ただし、$\{c_j : j = 0, 1, ..., 2^N - 1\}$ は任意の複素数とする。$|\psi\rangle$ と共役なベクトル $\langle\psi|$ を、$\{\langle j| : j = 0, 1, ..., 2^N - 1\}$ による展開形で書き表せ。

(6) (5) で定義した $|\psi\rangle$ が規格化されているとする。このとき、

$$\sum_{j=0}^{2^N-1} |c_j|^2 = 1, \tag{5}$$

が成り立つことを示せ。ただし、

$$\langle j|k\rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \text{ の場合} \\ 0 & j \neq k \text{ の場合} \end{cases}, \tag{6}$$

という事実を使っても良いとする。

[2] 3 量子ビット状態の基底ベクトルを $2^3 = 8$ 成分の縦ベクトルで書き表すことについて考える。まず、1 量子ビットの基底状態を、次の 2 成分縦ベクトルで表示する。

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

例えば、$|010\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle$ を縦ベクトルで表示するには、次の方法に従う。まず、一番左の先頭の量子ビット $|0\rangle$ のベクトル表示を以下で与える。

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

次に、一番左と中央の量子ビット $|0\rangle \otimes |1\rangle$ の縦ベクトル表現は以下で与えられる。

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

最後に、三つの量子ビット $|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle$ の縦ベクトル表現は次で与えられる。

$$|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

この方法を使って、3 量子ビットの全ての基底ベクトル $|jkl\rangle = |j\rangle \otimes |k\rangle \otimes |l\rangle$、ただし $j, k, l \in \{0, 1\}$、を 8 成分縦ベクトルで表示せよ。

[3] 様々な 1 量子ビットに作用するゲートの働きと性質について調べる。先ず例として X ゲート

$$X = 2\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

について考える。X はユニタリ行列と呼ばれる。これは、次の意味である。次の、任意の 2×2 行列 A を考える。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{12}$$

A の転置行列 A^{T} は次で与えられる。

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}. \tag{13}$$

A^{T} の各成分を複素共役したもの $A^\dagger = (A^{\mathrm{T}})^*$ は次で与えられる。

$$A^\dagger = (A^{\mathrm{T}})^* = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}. \tag{14}$$

この $A^\dagger$ を A のエルミート共役と呼ぶ。そして、$A^\dagger A = AA^\dagger = \boldsymbol{I}$ のとき、A をユニタリ行列と呼ぶ。ただし、$\boldsymbol{I}$ は単位行列 (恒等行列)、

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

とする。また、任意の 1 量子ビット状態 $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ を X ゲートに入力すると、

$$X|\psi\rangle = X(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = c_0|1\rangle + c_1|0\rangle, \tag{16}$$

という出力が得られ、結果としてビット反転 $|0\rangle \to |1\rangle, |1\rangle \to |0\rangle$ が起こったと分かる。以下のゲートがユニタリ行列であることを確かめよ。また、任意の状態 $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ を入力すると、どのような状態が出力されるか答えよ。

(1) $\quad Y = 2\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$

(2) $\quad Z = 2\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

(3) $\quad H = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$

(4) $\quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$

(5) $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}.$

[4] 量子力学の簡単な復習をする。
(1) 次のシュレディンガー方程式を仮定する。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle. \tag{17}$$

ただし、H は陽に時間変数 t に依存しないとする。このとき、

$$U = \exp(-iHt/\hbar), \tag{18}$$

として、

$$|\psi(t)\rangle = U|\psi(0)\rangle, \tag{19}$$

が式 (17) を満たすことを示せ。

(2) ハミルトニアン H はエルミート行列、すなわち、$H^\dagger = (H^{\mathrm{T}})^* = H$ とする。このとき、$U^\dagger U = \boldsymbol{I}$ であることを示せ。さらに、$|\psi(0)\rangle$ が規格化されていて $\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = 1$ を満たすなら、$|\psi(t)\rangle$ も規格化されていて $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1$ であることを示せ。

(3) 次の公式を確認せよ。

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}. \tag{20}$$

(4) ハミルトニアンが

$$H = \hbar\Omega\sigma_z = \frac{\hbar\Omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

で与えられるとする。このとき、

$$U = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)^n, \tag{22}$$

が具体的にどのような数式で書き下せるか求めよ。ただし、ここで (3) の結果を使って良いとする。

(5) 任意の 2×2 ユニタリ行列は以下の形で書ける。

$$U_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}. \tag{23}$$

このとき、$U_2^\dagger U_2 = \boldsymbol{I}$ より、$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ が得られることを示せ。また、(4) で求めた U が、これらの性質を持つことを確認せよ。

[5] 次のユニタリ行列 U を求める。

$$U = \exp(-iHt/\hbar), \tag{24}$$

$$H = \hbar\Omega\sigma_y = \frac{\hbar\Omega}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

(1)

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

とする。

$$V^\dagger V = VV^\dagger = \boldsymbol{I}, \tag{27}$$

を確認せよ。

(2)

$$V\sigma_y V^\dagger = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

を確認せよ。

(3) U を次の式変形に従って求めよ。

$$\begin{aligned} U &= \exp(-iHt/\hbar) \\ &= \exp(-i\Omega t\sigma_y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-i\Omega t\sigma_y)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\Omega t)^n}{n!}\sigma_y^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\Omega t)^n}{n!}V^\dagger V\sigma_y^n V^\dagger V \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\Omega t)^n}{n!}V^\dagger(V\sigma_y V^\dagger)(V\sigma_y V^\dagger)\cdots(V\sigma_y V^\dagger)V. \end{aligned} \tag{29}$$

(4) 1 量子ビットに作用する任意の 2×2 ユニタリ行列は以下の形で与えられることが知られている。

$$U = \exp(i\alpha\sigma_z)\exp(i\beta\sigma_y)\exp(i\gamma\sigma_z), \tag{30}$$

ただし、$\alpha = -\Omega t_1$, $\beta = -\Omega t_2$, $\gamma = -\Omega t_3$ とする。このことから、任意の 2×2 ユニタリ行列の形を一意に指定するには、3 個の実パラメータが必要であることを説明せよ。

[6]
(1) 図 1 で示される CNOT(controlled-NOT) ゲートは、次の 4×4 行列で表されるユニタリ変換である。

$$U_{\rm CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

ただし、この行列表示では、2 次元基底ベクトルとして

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

を、さらに、4 次元基底ベクトルとして

$$|j\rangle|k\rangle = |j\rangle\otimes|k\rangle, \tag{33}$$

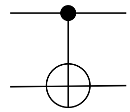

Figure 1:

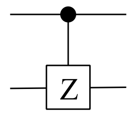

Figure 2:

ただし、$j, k \in \{0, 1\}$、を考えている。このとき、

$$U_{\mathrm{CNOT}}|j\rangle|k\rangle = |j\rangle|j \oplus k\rangle, \tag{34}$$

が成立することを示せ。ただし、$j \oplus k$ は $j + k$ の値を 2 で割った余りとする。このことから、CNOT ゲートが、二つの 2×2 行列 U_2, U_2' のテンソル積 $U_2 \otimes U_2'$ の形で書き表すことが不可能なことを説明せよ。

(2) 図 2 で示される CZ(controlled-Z) ゲートは、次の 4×4 行列で表されるユニタリ変換である。

$$U_{\mathrm{CZ}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

$U_{\mathrm{CZ}}|j\rangle|k\rangle$、ただし、$j, k \in \{0, 1\}$、を求めよ。

(3) 図 3 で示される関係が成り立つことを示せ。ただし、H は 2×2 Hadamard ゲート、

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

とする。

(4) 図 4 の関係が成立することを示せ。

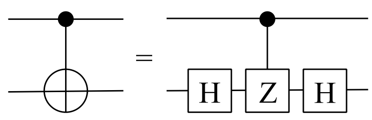

Figure 3:

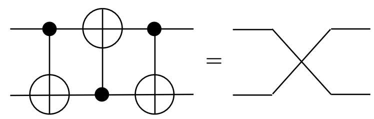

Figure 4:

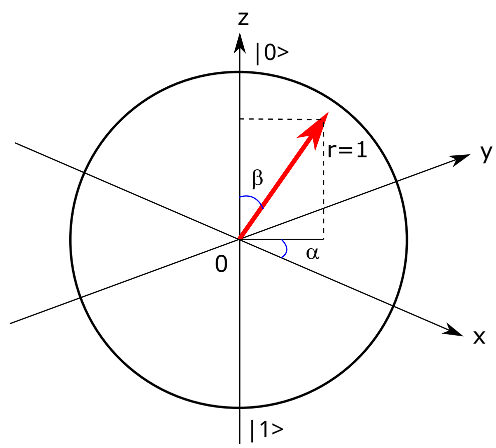

Figure 5:

2.3 Bloch 球を用いた状態表現

[7] 図 5 で示される Bloch 球を考える。北極の点を $|0\rangle$ に、南極の点を $|1\rangle$ に対応させることにする。ただし、

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

とする。ここで、以下の点に注意する。式 (37) で示されている 2 成分ベクトル表示の座標は、Bloch 球表示の x, y, z 成分の座標とは、直接関係がない。

(1) 既に問題 [5](3) で

$$\exp(-i\Omega t\sigma_y) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t/2) & -\sin(\Omega t/2) \\ \sin(\Omega t/2) & \cos(\Omega t/2) \end{pmatrix}, \tag{38}$$

であることを示した。これより、

$$\exp(-i\beta Y/2) = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix}, \tag{39}$$

であることを示せ。また、$\exp(-i\beta Y/2)|0\rangle$ を 2 成分ベクトル、および、$|0\rangle$, $|1\rangle$ の重ね合わせで表示せよ。さらに、この得られたベクトルが Bloch 球の xz 平面内に収まることを説明せよ。
(2) 既に問題 [4](4) で、$H = \hbar\Omega\sigma_z = \hbar\Omega Z/2$ として、

$$\exp(-iHt/\hbar) = \begin{pmatrix} e^{-i\Omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Omega t/2} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

であることを示した。これにより、

$$\exp(-i\alpha Z/2) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}, \tag{41}$$

であることを示せ。また、$\exp(-i\alpha Z/2)\exp(-i\beta Y/2)|0\rangle$ を、2 成分ベクトル、および、$|0\rangle$, $|1\rangle$ の重ね合わせで表示せよ。こうして得られたベクトルが、Bloch 球の表面上の任意の点を表していることを説明せよ。

(3) 大局的位相因子 (global phase) について考える。まず、次の互いに直交する規格化されたベクトルを考える。

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \tag{42}$$

このとき、$\langle +|+\rangle = \langle -|-\rangle = 1$, $\langle +|-\rangle = \langle -|+\rangle = 0$ は明らかである。ここで、次のように $|+\rangle$ に global phase $e^{i\theta}$ をかけることを考える。

$$|+'\rangle = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle). \tag{43}$$

このとき、$\langle +'|+'\rangle = 1$, $\langle +'|-\rangle = \langle -|+'\rangle = 0$ が成り立つことを示せ。このことから、global phase $e^{i\theta}$ は実際の物理的な性質を変化させないことを説明せよ。

(4) Bloch 球表面上の角度 (α, β) で指定される状態を、

$$|\psi\rangle = \cos(\beta/2)|0\rangle + e^{i\alpha}\sin(\beta/2)|1\rangle, \tag{44}$$

とする。Bloch 球表面上において、点 (α, β) の反対側 (裏側) の点は $(\pi + \alpha, \pi - \beta)$ である。この $(\pi + \alpha, \pi - \beta)$ で指定される状態 $|\psi_\perp\rangle$ を求めよ。また、$\langle \psi_\perp|\psi\rangle = 0$ を示せ。

2.4 重ね合わせ状態

[8] 次の重ね合わせ状態を考える。

$$|\psi(\alpha, \beta)\rangle = \cos(\beta/2)|0\rangle + e^{i\alpha}\sin(\beta/2)|1\rangle, \tag{45}$$

ただし、(α, β) は Bloch 球の角度とする。

(1) Bloch 球の角度 α が $\alpha + \epsilon$ にずれてしまった場合の状態 $|\psi(\alpha + \epsilon, \beta)\rangle$ を明示的な数式として書き下せ。

(2) $|\psi(\alpha + \epsilon, \beta)\rangle$ が $|\psi(\alpha, \beta)\rangle$ から、どの程度ずれているかを定量的に表す指標として、

$$F(\alpha, \beta, \epsilon) = |\langle \psi(\alpha + \epsilon, \beta)|\psi(\alpha, \beta)\rangle|^2, \tag{46}$$

が考えられ、この量は fidelity と呼ばれる。$F(\alpha, \beta, \epsilon)$ を明示的な数式として求めよ。

(3) $F(\pi/4, \pi/4, 0)$, $F(\pi/4, \pi/4, 0.05)$, $F(\pi/4, \pi/4, 0.1)$ を数値として求めよ。ただし、計算に関数電卓等を使っても良いとする。

(4) Bloch 球の角度 β が $\beta + \epsilon$ にずれてしまった場合の状態 $|\psi(\alpha, \beta + \epsilon)\rangle$ を、明示的な数式として書き下せ。

(5) 次の fidelity、

$$F'(\alpha, \beta, \epsilon) = |\langle\psi(\alpha, \beta + \epsilon)|\psi(\alpha, \beta)\rangle|^2, \tag{47}$$

を明示的な数式として求めよ。

(6) $F'(\pi/4, \pi/4, 0)$, $F'(\pi/4, \pi/4, 0.05)$, $F'(\pi/4, \pi/4, 0.1)$ を数値として求めよ。ただし、計算に関数電卓等を使っても良いとする。