量子コンピュータ設計へ向けた量子情報入門

練習問題の解答　(作成者　吾妻広夫)

Basics 1

1.1 量子ビットとは

[1]
(1) ‘100’, $p(1-p)^2$

(2) ‘011’, $p(1-p)^2$

(3) ‘110’, ‘101’, ‘011’, $3p^2(1-p)$

(4) ‘001’, ‘010’, ‘100’, $3p^2(1-p)$

(5) 元々のビット列が ‘000’ だったとして、エラーによる先頭の二つのビットのビット反転で、結果としてビット列 ‘110’ が得られたとする。ビット値 ‘0’ の個数は 1、ビット値 ‘1’ の個数は 2 で、多数決により元のビット列は ‘111’ と判定される。従って、本来の元のビット列 ‘000’ には回復されないことになる。同様に、‘111’ の先頭の二つのビットでビット反転が起こって得られた ‘001’ に対して、多数決の規則を適用すると、元のビット列は ‘000’ と判定される。これも、元のビット列 ‘111’ には回復されないことになる。このような意味で、この問題で示した冗長化方法では、2 個のビット値の反転が起こってしまった場合、誤り訂正不可能であることが理解される。

[2]
(1)

$$\langle 0|0\rangle = (1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad \langle 1|1\rangle = (0,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1. \tag{1}$$

(2)

$$\langle 0|1\rangle = (1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \langle 1|0\rangle = (0,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{2}$$

(3)

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \langle\psi| &= a^*\langle 0| + b^*\langle 1| = (a^*,0) + (0,b^*) = (a^*,b^*). \end{aligned} \tag{3}$$

(4)

$$\langle\psi|\psi\rangle = (a^*, b^*)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = |a|^2 + |b|^2. \tag{4}$$

一方、仮定より $|\psi\rangle$ は規格化されていて、$\langle\psi|\psi\rangle = 1$ なので、$|a|^2 + |b|^2 = 1$ が得られる。

[3]

(1)

確率: $|\langle 0|\psi\rangle|^2 = |a|^2$

ただし、この計算では、$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$, $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$ という事実を使った。

測定後、状態 $|\psi\rangle$ は $|0\rangle$ に収縮する。

(2)

確率: $|\langle 1|\psi\rangle|^2 = |b|^2$

測定後、状態 $|\psi\rangle$ は $|1\rangle$ に収縮する。

(3)

$$\begin{aligned}
\langle +|+\rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right] \\
&= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(1 + 0 + 0 + 1) \\
&= 1,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\langle -|-\rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - \langle 1|)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right] \\
&= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle - \langle 0|1\rangle - \langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(1 - 0 - 0 + 1) \\
&= 1,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\langle +|-\rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right] \\
&= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle - \langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle - \langle 1|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(1 - 0 + 0 - 1) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\langle -|+\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - \langle 1|)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle - \langle 1|0\rangle - \langle 1|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(1+0-0-1) \\
&= 0. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

(4)
確率:

$$
\begin{aligned}
|\langle +|\psi\rangle|^2 &= \left|\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|)\right](a|0\rangle + b|1\rangle)\right|^2 \\
&= \left|\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right|^2 \\
&= \frac{1}{2}|a+b|^2 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

測定後、状態 $|\psi\rangle$ は $|+\rangle$ に収縮する。

(5) 確率:

$$
\begin{aligned}
|\langle -|\psi\rangle|^2 &= \left|\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - \langle 1|)\right](a|0\rangle + b|1\rangle)\right|^2 \\
&= \left|\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}}\right|^2 \\
&= \frac{1}{2}|a-b|^2 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

測定後、状態 $|\psi\rangle$ は $|-\rangle$ に収縮する。

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}|a+b|^2 + \frac{1}{2}|a-b|^2 \\
=\ & \frac{1}{2}(a^* + b^*)(a+b) + \frac{1}{2}(a^* - b^*)(a-b) \\
=\ & \frac{1}{2}(|a|^2 + a^*b + b^*a + |b|^2) + \frac{1}{2}(|a|^2 - a^*b - b^*a + |b|^2) \\
=\ & |a|^2 + |b|^2 \\
=\ & 1. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

(6)

$$\begin{aligned}\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle &= (a^*\langle 0| + b^*\langle 1|)(a|0\rangle + b|1\rangle) \\ &= |a|^2 + |b|^2 \\ &= 1,\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle &= (-b\langle 0| + a\langle 1|)(-b^*|0\rangle + a^*|1\rangle) \\ &= |b|^2 + |a|^2 \\ &= 1,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\langle\varphi_0|\varphi_1\rangle &= (a^*\langle 0| + b^*\langle 1|)(-b^*|0\rangle + a^*|1\rangle) \\ &= -a^*b^* + b^*a^* \\ &= 0,\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\langle\varphi_1|\varphi_0\rangle &= (-b\langle 0| + a\langle 1|)(a|0\rangle + b|1\rangle) \\ &= -ba + ab \\ &= 0.\end{aligned} \tag{15}$$

(7)
$|\psi\rangle$ に対して測定を行って $|\varphi_0\rangle$ を得る確率:

$$|\langle\varphi_0|\psi\rangle|^2 = |\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle|^2 = 1 \tag{16}$$

測定後の状態: $|\varphi_0\rangle = |\psi\rangle$
$|\psi\rangle$ に対して測定を行って $|\varphi_1\rangle$ を得る確率:

$$|\langle\varphi_1|\psi\rangle|^2 = |\langle\varphi_1|\varphi_0\rangle|^2 = 0 \tag{17}$$

測定後の状態: 0 (状態は存在しない)

(8) 測定者が $\{|\varphi_0\rangle, |\varphi_1\rangle\}$ を用意するには、

$$|\varphi_0\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad |\varphi_1\rangle = -b^*|0\rangle + a^*|1\rangle, \tag{18}$$

より、a, b の値を厳密に知っている必要がある。

[4]
(1)

$$\begin{aligned}&\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = (1/4)\boldsymbol{I}, \\ &\sigma_x\sigma_y = (i/2)\sigma_z, \quad \sigma_y\sigma_z = (i/2)\sigma_x, \quad \sigma_z\sigma_x = (i/2)\sigma_y, \\ &\sigma_y\sigma_x = -(i/2)\sigma_z, \quad \sigma_z\sigma_y = -(i/2)\sigma_x, \quad \sigma_x\sigma_z = -(i/2)\sigma_y.\end{aligned} \tag{19}$$

$$
\begin{aligned}
&[\sigma_x,\sigma_y]=i\sigma_z, \quad [\sigma_y,\sigma_z]=i\sigma_x, \quad [\sigma_z,\sigma_x]=i\sigma_y,\\
&[\sigma_y,\sigma_x]=-i\sigma_z, \quad [\sigma_z,\sigma_y]=-i\sigma_x, \quad [\sigma_x,\sigma_z]=-i\sigma_y,\\
&[\sigma_x,\sigma_x]=0, \quad [\sigma_y,\sigma_y]=0, \quad [\sigma_z,\sigma_z]=0.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
2\sigma_x|0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle,\\
2\sigma_x|1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$2\sigma_x$ は、$|0\rangle \to |1\rangle$, $|1\rangle \to |0\rangle$ という変換を引き起こす。これはビット反転と言える。

(3)

$$
\begin{aligned}
2\sigma_z|+\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\\
&= |-\rangle,\\
2\sigma_z|-\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\\
&= |+\rangle.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$2\sigma_z$ は、$|+\rangle \to |-\rangle$, $|-\rangle \to |+\rangle$ という変換を引き起こす。これは、$\{|+\rangle, |-\rangle\}$ 内でのビット反転と言える。

(4)

$$
\begin{aligned}
2\sigma_y|\tilde{+}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i|1\rangle = |\tilde{-}\rangle,\\
2\sigma_y|\tilde{-}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle = |\tilde{+}\rangle.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$2\sigma_y$ は、$|\tilde{+}\rangle \to |\tilde{-}\rangle, |\tilde{-}\rangle \to |\tilde{+}\rangle$ という変換を引き起こす。これは、$\{|\tilde{+}\rangle, |\tilde{-}\rangle\}$ 内でのビット反転と言える。

(5)

$$\begin{aligned} J_+ &= \sigma_x + i\sigma_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ J_- &= \sigma_x - i\sigma_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{24}$$

$$[J_+, J_-] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_z. \tag{25}$$

(6)

$$\begin{aligned} J_+|0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\ J_+|1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle, \\ J_-|0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle, \\ J_-|1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

ここで、$|1\rangle$ をエネルギーが最小値の基底状態 (ground state) $|g\rangle$、$|0\rangle$ をエネルギー第一励起状態 (excited state) $|e\rangle$ と見なす。すると、$J_+|g\rangle = |e\rangle$, $J_-|e\rangle = |g\rangle$ となり、J_+ は $|g\rangle \to |e\rangle$、J_- は $|e\rangle \to |g\rangle$ という変換を引き起こす。すなわち、J_+ はエネルギーを上昇させ、J_- はエネルギーを下降させている。従って、J_+, J_- は昇降演算子と呼ばれる。