

量子コンピュータ設計へ向けた量子情報入門

練習問題 (作成者 吾妻広夫)

Basics 1

1.1 量子ビットとは

[1] 古典ビットを誤り訂正する方法について考える。古典ビット‘0’, ‘1’を次のように3ビットで冗長化する。

$$0 \rightarrow 000, \quad 1 \rightarrow 111. \quad (1)$$

一つのビットにエラーが生じて、ビット値が反転する確率を p 、反転しない確率を $1 - p$ とする。ただし、 $0 \leq p \leq 1$ と仮定する。

(1) 3個のビット全てにおいて、エラーが発生したとする。‘000’の先頭の一番目のビットにだけビット反転が起こった場合、結果としてどのようなビット列に変化するか答えよ。また、そのように変化する確率を答えよ。

(2) 上の(1)と同様のエラーが生じたとして、‘111’の先頭の一番目のビットにだけビット反転が起こった場合、結果としてどのようなビット列に変化するか答えよ。また、そのように変化する確率を答えよ。

(3) 上の(1)と同様のエラーが生じたとする。‘000’に対して2個のビット反転が起こった場合、結果として得られるビット列は3種類ある。それらを全て答えよ。また、それら3種類のビット列が得られる確率の合計を求めよ。

(4) 上の(1)と同様のエラーが生じたとする。‘111’に対して2個のビット反転が起こった場合、結果として得られるビット列は3種類ある。それら全てを答えよ。また、それら3種類のビット列が得られる確率の合計を求めよ。

(5) 3個の冗長化されたビット列‘000’, ‘111’に対して、先頭の一番目のビットがエラーで反転した場合、‘100’, ‘011’が得られる。‘100’が得られた場合、ビット値‘0’の個数は2、ビット値‘1’の個数は1なので、多数決により、元のビット列は‘000’だと判定できる。ビット列‘011’についても同様の規則を適用して、元のビット列は‘111’だと判定できる。しかし、ビット列‘000’, ‘111’の1番目、2番目のビット値が反転して‘110’, ‘001’が得られた場合、多数決の規則を適用すると元のビット列を回復することは出来ない。その理由を述べよ。

[2] 量子ビットを2成分ベクトルで表現することを考える。量子ビットの二つの状態 $|0\rangle$, $|1\rangle$ を次のように2成分縦ベクトルで書き表す。

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と定義する流儀もあるが、この講義コースの練習問題では、式

(2) のやり方に統一する。これは、この定義に従うと、2 量子ビットのゲート操作を 4×4 行列で表示する際に、簡単になるからである。] $|0\rangle, |1\rangle$ と共役な状態 $\langle 0|, \langle 1|$ を、次のように 2 成分横ベクトルで書き表すことにする。

$$\langle 0| = (1, 0), \quad \langle 1| = (0, 1). \quad (3)$$

(1) ベクトル $|0\rangle, |1\rangle$ がそれぞれ規格化されていること、すなわち、 $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$ となることを示せ。

(2) ベクトル $|0\rangle, |1\rangle$ が互いに直交すること、すなわち、 $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$ となることを示せ。

(3) 二つの状態 $|0\rangle, |1\rangle$ の重ね合わせとして、次の状態を考える。

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle. \quad (4)$$

ただし、 a, b は任意の複素数とする。 $|\psi\rangle$ と共役な状態は、次で与えられる。

$$\langle \psi| = a^* \langle 0| + b^* \langle 1|. \quad (5)$$

ただし、 a^*, b^* は、 a, b の複素共役とする。 $|\psi\rangle, \langle \psi|$ の 2 成分ベクトルによる表現を書け。

(4) $|\psi\rangle$ が規格化されているとすると、すなわち、 $|\psi\rangle$ のノルムが 1 とすると、 $\langle \psi|\psi\rangle = 1$ が成り立つ。このことから、 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ を導出せよ。

1.2 量子誤り訂正の導入へ向けた考察

[3] 量子ビットの状態が $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ で与えられているとする。ただし、 a, b は任意の複素数で、かつ、 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ とする。

(1) 状態 $|\psi\rangle$ に対して、測定を行って $|0\rangle$ を見出す確率を求めよ。また、この測定を行った後の量子ビットの状態を答えよ。

(2) 状態 $|\psi\rangle$ に対して、測定を行って $|1\rangle$ を見出す確率を求めよ。また、この測定を行った後の量子ビットの状態を答えよ。

(3) 上記 (1), (2) では、互いに直交するベクトルのペア $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ で状態 $|\psi\rangle$ を測定し、測定後の状態は $|0\rangle$ あるいは $|1\rangle$ に収縮した。このように互いに直交し合うベクトルのペア $\{|\varphi_0\rangle, |\varphi_1\rangle\}$ 、ただし、 $\langle \varphi_0|\varphi_0\rangle = 1, \langle \varphi_1|\varphi_1\rangle = 1, \langle \varphi_0|\varphi_1\rangle = 0, \langle \varphi_1|\varphi_0\rangle = 0$ による測定を、射影測定と呼ぶ。この場合、射影測定後の量子ビット状態は、 $|\varphi_0\rangle$ または $|\varphi_1\rangle$ に収縮する。ここで、次のような (1), (2) とは異なる射影測定を考える。以下の二つの規格化されたベクトルを考える。

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (6)$$

$\langle +|+ \rangle = 1, \langle -|- \rangle = 1, \langle +|- \rangle = 0, \langle -|+ \rangle = 0$ を確かめよ。

(4) 状態 $|\psi\rangle$ に対して、測定を行って $|+\rangle$ を見出す確率を求めよ。また、この測定を行った後の量子ビットの状態を答えよ。

(5) 状態 $|\psi\rangle$ に対して、測定を行って $|-\rangle$ を見出す確率を求めよ。また、この測定を行った後の量子ビットの状態を答えよ。さらに、 $|+\rangle$ を見出す確率と $|-\rangle$ を見出す確率の和が 1 となることを確かめよ。

(6) 次の二つの規格化された状態を考える。

$$|\varphi_0\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad |\varphi_1\rangle = -b^*|0\rangle + a^*|1\rangle. \quad (7)$$

$\langle \varphi_0|\varphi_0 \rangle = 1, \langle \varphi_1|\varphi_1 \rangle = 1, \langle \varphi_0|\varphi_1 \rangle = 0, \langle \varphi_1|\varphi_0 \rangle = 0$ を確かめよ。

(7) 状態 $|\psi\rangle$ に対して、(6) で定義したベクトルのペア $\{|\varphi_0\rangle, |\varphi_1\rangle\}$ による射影測定を行うことを考える。状態 $|\psi\rangle$ に対して、測定を行って $|\varphi_0\rangle$ を見出す確率、および、その場合の測定を行った後の量子ビットの状態を答えよ。また、状態 $|\psi\rangle$ に対して、測定を行って $|\varphi_1\rangle$ を見出す確率、および、その場合の測定を行った後の量子ビットの状態を答えよ。

(8) (7) より、未知の状態 $|\psi\rangle$ を一種類の射影測定で完全に識別するには、ベクトルのペア $\{|\varphi_0\rangle, |\varphi_1\rangle\}$ を用意しなくてはならないことが理解される。このことは、測定者があらかじめ係数 a, b の知識を手元に保持していなくてはならないことを意味することを説明しなさい。

[4]

(1) Pauli 行列を以下のように定義する。

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

また、恒等行列として以下を定義する。

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

このとき、 $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2, \sigma_x\sigma_y, \sigma_y\sigma_z, \sigma_z\sigma_x, \sigma_y\sigma_x, \sigma_z\sigma_y, \sigma_x\sigma_z$ を求めよ。これらの計算結果より、交換関係

$$[\sigma_j, \sigma_k] \equiv \sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j = i \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} \sigma_l, \quad (10)$$

ただし、 $\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_y, \sigma_3 = \sigma_z,$

$$\epsilon_{jkl} = \begin{cases} 1 & (j, k, l) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \text{ の場合} \\ -1 & (j, k, l) = (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3) \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases} \quad (11)$$

が成立することを示せ。

(2) ベクトルのペアを、

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

として、 $2\sigma_x|0\rangle, 2\sigma_x|1\rangle$ を求めよ。これにより、 $2\sigma_x$ を $|0\rangle, |1\rangle$ に作用させると、ビット反転が生じることを説明せよ。

(3) ベクトルのペアを、

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), \quad (13)$$

として、 $2\sigma_z|+\rangle, 2\sigma_z|-\rangle$ を求めよ。これにより、 $2\sigma_z$ を $|+\rangle, |-\rangle$ に作用させると、 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ のベクトルのペア内でビット反転が生じることを説明せよ。

(4) ベクトルのペアを、 $|\tilde{+}\rangle = |0\rangle, |\tilde{-}\rangle = i|1\rangle$ として、 $2\sigma_y|\tilde{+}\rangle, 2\sigma_y|\tilde{-}\rangle$ を求めよ。これにより、 $2\sigma_y$ を $|\tilde{+}\rangle, |\tilde{-}\rangle$ に作用させると、 $\{|\tilde{+}\rangle, |\tilde{-}\rangle\}$ のベクトルのペア内でビット反転が生じることを説明せよ。

(5) 次の演算子

$$J_+ = \sigma_x + i\sigma_y, \quad J_- = \sigma_x - i\sigma_y, \quad (14)$$

を定義して、 J_+, J_- の 2×2 行列表現を求めよ。さらに、交換関係 $[J_+, J_-] \equiv J_+J_- - J_-J_+$ を求めよ。

(6) $J_+|0\rangle, J_+|1\rangle, J_-|0\rangle, J_-|1\rangle$ を求めよ。 $\{J_+, J_-\}$ は昇降演算子と呼ばれる。その理由を説明せよ。

練習問題 Basics 1 © 2026 by 吾妻広夫 is licensed under CC BY-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>