

### 練習問題 1

量子テレポテーションについて考える。Alice は、次の任意の 1-qubit 状態を持っているとする。

$$|\psi\rangle_{A_1} = \alpha|0\rangle_{A_1} + \beta|1\rangle_{A_1} \quad (1)$$

また、同時に、Alice と Bob は以下のベル状態を共有しているとする。

$$|\Phi^+\rangle_{A_2B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{A_2}|0\rangle_B + |1\rangle_{A_2}|1\rangle_B) \quad (2)$$

1. Alice と Bob の所有する qubit  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $B$  全体の状態が、以下のように書けることを示しなさい。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{A_1}|\Phi^+\rangle_{A_2B} &= (\alpha|0\rangle_{A_1} + \beta|1\rangle_{A_1})\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{A_2}|0\rangle_B + |1\rangle_{A_2}|1\rangle_B) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle_{A_1}|0\rangle_{A_2}|0\rangle_B + \alpha|0\rangle_{A_1}|1\rangle_{A_2}|1\rangle_B \\ &\quad + \beta|1\rangle_{A_1}|0\rangle_{A_2}|0\rangle_B + \beta|1\rangle_{A_1}|1\rangle_{A_2}|1\rangle_B) \end{aligned} \quad (3)$$

2. ベル状態として次の四つを考える。

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \\ |\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \\ |\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \end{aligned} \quad (4)$$

このとき、以下が成立することを示しなさい。

$$\begin{aligned} |00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle), \\ |11\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle), \\ |01\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle), \\ |10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle) \end{aligned} \quad (5)$$

3. Alice と Bob の所有する qubit  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $B$  全体の状態である  $|\psi\rangle_{A_1}|\Phi^+\rangle_{A_2B}$  が、以下のように書けることを示しなさい。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{A_1}|\Phi^+\rangle_{A_2B} &= \frac{1}{2} \left[ \alpha(|\Phi^+\rangle_{A_1A_2} + |\Phi^-\rangle_{A_1A_2})|0\rangle_B \right. \\ &\quad + \alpha(|\Psi^+\rangle_{A_1A_2} + |\Psi^-\rangle_{A_1A_2})|1\rangle_B \\ &\quad + \beta(|\Psi^+\rangle_{A_1A_2} - |\Psi^-\rangle_{A_1A_2})|0\rangle_B \\ &\quad \left. + \beta(|\Phi^+\rangle_{A_1A_2} - |\Phi^-\rangle_{A_1A_2})|1\rangle_B \right] \end{aligned} \quad (6)$$

4. Alice と Bob の所有する qubit  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $B$  全体の状態である  $|\psi\rangle_{A_1}|\Phi^+\rangle_{A_2B}$  が、以下のように書けることを示しなさい。

$$|\psi\rangle_{A_1}|\Phi^+\rangle_{A_2B} = \frac{1}{2} \left[ |\Phi^+\rangle_{A_1A_2}(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) + |\Phi^-\rangle_{A_1A_2}(\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) \right. \\ \left. + |\Psi^+\rangle_{A_1A_2}(\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B) + |\Psi^-\rangle_{A_1A_2}(\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B) \right] \quad (7)$$

5. Alice は qubit  $A_1$ 、 $A_2$  に対して、ベル状態  $\{|\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle\}$  で観測を行うとする。Alice が  $|\Phi^+\rangle$  を得る確率を求めなさい。また、このとき、Bob の得る qubit  $B$  の状態を求めなさい。同様のことを、Alice が  $|\Phi^-\rangle$ 、 $|\Psi^+\rangle$ 、 $|\Psi^-\rangle$  を得た場合について求めなさい。