



作成者：吾妻広夫

練習問題 2

Z 基底ベクトルを以下で与える。

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

X 基底ベクトルを以下で与える。

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

任意の 1-qubit 状態 $|\psi\rangle$ を次で与える。

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (3)$$

1. 1-qubit 状態 $|\psi\rangle$ を Z 基底で観測して、 $|0\rangle$ を得た場合、測定値 $+1$ を対応させることにする。同様にして、 $|1\rangle$ を得た場合、測定値 -1 を対応させることにする。測定値が $+1$ となる確率を $\text{Prob}\{+1\}$ 、測定値が -1 となる確率を $\text{Prob}\{-1\}$ と書くことにする。 $\text{Prob}\{+1\}$ 、 $\text{Prob}\{-1\}$ を、状態ベクトルの係数 α 、 β で表しなさい。
2. 1-qubit 状態 $|\psi\rangle$ を X 基底で観測して、 $|+\rangle$ を得た場合、測定値 $+1$ を対応させることにする。同様にして、 $|-\rangle$ を得た場合、測定値 -1 を対応させることにする。測定値が $+1$ となる確率を $\text{Prob}\{+1\}$ 、測定値が -1 となる確率を $\text{Prob}\{-1\}$ と書くことにする。 $\text{Prob}\{+1\}$ 、 $\text{Prob}\{-1\}$ を、状態ベクトルの係数 α 、 β で表しなさい。
3. Hadamard 変換 H を次のように定義する。

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

さらに、1-qubit 状態ベクトルとして以下を考える。

$$|\psi'\rangle = H|\psi\rangle \quad (5)$$

- 1-qubit 状態 $|\psi'\rangle$ を Z 基底で観測して、 $|0\rangle$ を得た場合、測定値 $+1$ を対応させることにする。同様にして、 $|1\rangle$ を得た場合、測定値 -1 を対応させることにする。測定値が $+1$ となる確率を $\text{Prob}\{+1\}$ 、測定値が -1 となる確率を $\text{Prob}\{-1\}$ と書くことにする。 $\text{Prob}\{+1\}$ 、 $\text{Prob}\{-1\}$ を、状態ベクトルの係数 α 、 β で表しなさい。
4. 1-qubit 状態 $|\psi\rangle$ を X 基底で観測して得られる $\text{Prob}\{+1\}$ 、 $\text{Prob}\{-1\}$ と、1-qubit 状態 $|\psi'\rangle$ を Z 基底で観測して得られる $\text{Prob}\{+1\}$ 、 $\text{Prob}\{-1\}$ とは、それぞれ互いに等しい。この理由を説明しなさい。