作成者：吾妻広夫

解答

1. 例えば、以下の計算により確認できる。

$$\begin{aligned}\langle\Phi^+|\Phi^+\rangle &= \frac{1}{2}(\langle 0|\langle 0| + \langle 1|\langle 1|)(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0|\langle 0|0\rangle|0\rangle + \langle 0|\langle 0|1\rangle|1\rangle + \langle 1|\langle 1|0\rangle|0\rangle + \langle 1|\langle 1|1\rangle|1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle\langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle\langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle\langle 1|1\rangle) \\ &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\langle\Phi^+|\Phi^-\rangle &= \frac{1}{2}(\langle 0|\langle 0| + \langle 1|\langle 1|)(|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0|\langle 0|0\rangle|0\rangle - \langle 0|\langle 0|1\rangle|1\rangle + \langle 1|\langle 1|0\rangle|0\rangle - \langle 1|\langle 1|1\rangle|1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle\langle 0|0\rangle - \langle 0|1\rangle\langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle\langle 1|0\rangle - \langle 1|1\rangle\langle 1|1\rangle) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

他のベル状態ベクトル同士の内積も、同様に計算できる。

2. 次の関係式を用意しておくと便利である。

$$\begin{aligned}|00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle), \\ |01\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle), \\ |10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle), \\ |11\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle) \end{aligned} \tag{3}$$

上の関係式を使えば、$|\psi\rangle$ は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle) \\ &\quad + \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle) + \frac{\delta}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle) \\ &= \frac{\alpha+\delta}{\sqrt{2}}|\Phi^+\rangle + \frac{\alpha-\delta}{\sqrt{2}}|\Phi^-\rangle + \frac{\beta+\gamma}{\sqrt{2}}|\Psi^+\rangle + \frac{\beta-\gamma}{\sqrt{2}}|\Psi^-\rangle \end{aligned} \tag{4}$$