解答

作成者：吾妻広夫

1. 量子通信回線を通るのは qubit B のみで、従って qubit B のみがビット反転演算子としてパウリ行列 $X$ の作用を受ける。このとき、以下の変換が起こる。

$$
\begin{aligned}
X|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{\mathrm{A1}}X|0\rangle_{\mathrm{B1}} + |1\rangle_{\mathrm{A1}}X|1\rangle_{\mathrm{B1}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{\mathrm{A1}}|1\rangle_{\mathrm{B1}} + |1\rangle_{\mathrm{A1}}|0\rangle_{\mathrm{B1}}) \\
&= |\Psi^+\rangle_{\mathrm{A1B1}} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

よって、量子通信チャンネルは、状態 $|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1}}$ を次のように変化させる。

$$
\begin{aligned}
|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1A1B1}}\langle\Phi^+| &\to F|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1A1B1}}\langle\Phi^+| + (1-F)X|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1A1B1}}\langle\Phi^+|X \\
&= F|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1A1B1}}\langle\Phi^+| + (1-F)|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A1B1A1B1}}\langle\Psi^+| \qquad (2)
\end{aligned}
$$

2. 量子通信チャンネル通過後の qubit A1、B1、A2、B2 の状態は以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
&[F|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1A1B1}}\langle\Phi^+| + (1-F)|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A1B1A1B1}}\langle\Psi^+|] \\
&\times[F|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A2B2A2B2}}\langle\Phi^+| + (1-F)|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A2B2A2B2}}\langle\Psi^+|] \qquad (3)
\end{aligned}
$$

従って、Alice と Bob が、$|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1}}$ と $|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A2B2}}$ を共有する確率は $F^2$ となる。

同様にして、Alice と Bob が、$|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1}}$ と $|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A2B2}}$ を共有する確率は $F(1-F)$ となる。

また、Alice と Bob が、$|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A1B1}}$ と $|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A2B2}}$ を共有する確率は $F(1-F)$ となる。

さらに、Alice と Bob が、$|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A1B1}}$ と $|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A2B2}}$ を共有する確率は $(1-F)^2$ となる。

3. $|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1}}|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A2B2}}$ を共有している場合は以下の通り。

$$
\begin{aligned}
|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1}}|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A2B2}} &= \frac{1}{2}(|00\rangle_{\mathrm{A1B1}}|01\rangle_{\mathrm{A2B2}} + |00\rangle_{\mathrm{A1B1}}|10\rangle_{\mathrm{A2B2}} \\
&\quad +|11\rangle_{\mathrm{A1B1}}|01\rangle_{\mathrm{A2B2}} + |11\rangle_{\mathrm{A1B1}}|10\rangle_{\mathrm{A2B2}}) \\
&\xrightarrow{\mathrm{CNOT_A}} \frac{1}{2}(|00\rangle_{\mathrm{A1B1}}|01\rangle_{\mathrm{A2B2}} + |00\rangle_{\mathrm{A1B1}}|10\rangle_{\mathrm{A2B2}} \\
&\quad +|11\rangle_{\mathrm{A1B1}}|11\rangle_{\mathrm{A2B2}} + |11\rangle_{\mathrm{A1B1}}|00\rangle_{\mathrm{A2B2}}) \\
&\xrightarrow{\mathrm{CNOT_B}} \frac{1}{2}(|00\rangle_{\mathrm{A1B1}}|01\rangle_{\mathrm{A2B2}} + |00\rangle_{\mathrm{A1B1}}|10\rangle_{\mathrm{A2B2}} \\
&\quad +|11\rangle_{\mathrm{A1B1}}|10\rangle_{\mathrm{A2B2}} + |11\rangle_{\mathrm{A1B1}}|01\rangle_{\mathrm{A2B2}}) \\
&= |\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1}}|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A2B2}} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

$|\Psi^+\rangle_{\rm A1B1}|\Phi^+\rangle_{\rm A2B2}$ を共有している場合は以下の通り。

$$\begin{aligned}
|\Psi^+\rangle_{\rm A1B1}|\Phi^+\rangle_{\rm A2B2} &= \frac{1}{2}(|01\rangle_{\rm A1B1}|00\rangle_{\rm A2B2}+|01\rangle_{\rm A1B1}|11\rangle_{\rm A2B2} \\
&\quad +|10\rangle_{\rm A1B1}|00\rangle_{\rm A2B2}+|10\rangle_{\rm A1B1}|11\rangle_{\rm A2B2}) \\
&\xrightarrow{\rm CNOT_A} \frac{1}{2}(|01\rangle_{\rm A1B1}|00\rangle_{\rm A2B2}+|01\rangle_{\rm A1B1}|11\rangle_{\rm A2B2} \\
&\quad +|10\rangle_{\rm A1B1}|10\rangle_{\rm A2B2}+|10\rangle_{\rm A1B1}|01\rangle_{\rm A2B2}) \\
&\xrightarrow{\rm CNOT_B} \frac{1}{2}(|01\rangle_{\rm A1B1}|01\rangle_{\rm A2B2}+|01\rangle_{\rm A1B1}|10\rangle_{\rm A2B2} \\
&\quad +|10\rangle_{\rm A1B1}|10\rangle_{\rm A2B2}+|10\rangle_{\rm A1B1}|01\rangle_{\rm A2B2}) \\
&= |\Psi^+\rangle_{\rm A1B1}|\Psi^+\rangle_{\rm A2B2} \qquad (5)
\end{aligned}$$

$|\Psi^+\rangle_{\rm A1B1}|\Psi^+\rangle_{\rm A2B2}$ を共有している場合は以下の通り。

$$\begin{aligned}
|\Psi^+\rangle_{\rm A1B1}|\Psi^+\rangle_{\rm A2B2} &= \frac{1}{2}(|01\rangle_{\rm A1B1}|01\rangle_{\rm A2B2}+|01\rangle_{\rm A1B1}|10\rangle_{\rm A2B2} \\
&\quad +|10\rangle_{\rm A1B1}|01\rangle_{\rm A2B2}+|10\rangle_{\rm A1B1}|10\rangle_{\rm A2B2}) \\
&\xrightarrow{\rm CNOT_A} \frac{1}{2}(|01\rangle_{\rm A1B1}|01\rangle_{\rm A2B2}+|01\rangle_{\rm A1B1}|10\rangle_{\rm A2B2} \\
&\quad +|10\rangle_{\rm A1B1}|11\rangle_{\rm A2B2}+|10\rangle_{\rm A1B1}|00\rangle_{\rm A2B2}) \\
&\xrightarrow{\rm CNOT_B} \frac{1}{2}(|01\rangle_{\rm A1B1}|00\rangle_{\rm A2B2}+|01\rangle_{\rm A1B1}|11\rangle_{\rm A2B2} \\
&\quad +|10\rangle_{\rm A1B1}|11\rangle_{\rm A2B2}+|10\rangle_{\rm A1B1}|00\rangle_{\rm A2B2}) \\
&= |\Psi^+\rangle_{\rm A1B1}|\Phi^+\rangle_{\rm A2B2} \qquad (6)
\end{aligned}$$

4. Alice と Bob が $|\Phi^+\rangle_{\rm A1B1}|\Phi^+\rangle_{\rm A2B2}$ を共有する確率は $F^2$、$|\Psi^+\rangle_{\rm A1B1}|\Phi^+\rangle_{\rm A2B2}$ を共有する確率は $(1-F)^2$ で与えられる。そして、qubit A2、B2 の測定結果が同じになるのは、これらの場合だけである。よって、qubit A2、B2 の測定結果が同じになるという条件下では、Alice と Bob が $|\Phi^+\rangle_{\rm A1B1}$ を得る確率 $F'$ は、

$$F' = \frac{F^2}{F^2+(1-F)^2} \qquad (7)$$

で与えられることになる。明らかに、Alice と Bob が $|\Psi^+\rangle_{\rm A1B1}$ を得る確率は $1-F'$ である。

また、$1/2 < F < 1$ であるので、

$$\begin{aligned}
F'-F &= \frac{F^2}{F^2+(1-F)^2}-F \\
&= \frac{F^2-F^3-F(1-F)^2}{F^2+(1-F)^2}-F \\
&= \frac{-F(2F-1)(F-1)}{F^2+(1-F)^2} \\
&> 0 \qquad (8)
\end{aligned}$$

5. 確率 $F$ で $|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1}}$、確率 $1-F$ で $|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A2B2}}$ にある混合状態を、Alice と Bob が複数共有して上記の過程を行えば、Alice と Bob は、確率 $F'$ で $|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1}}$、確率 $1-F'$ で $|\Psi^+\rangle_{\mathrm{A2B2}}$ にある混合状態を共有することになる。このプロセスを繰り返せば、Alice と Bob が $|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1}}$ を共有する確率は単調増加し、最終的に $|\Phi^+\rangle_{\mathrm{A1B1}}$ の純粋状態を共有することになる。