

練習問題

1. qubit A1 と B1 から成るベル状態

$$|\Phi^+\rangle_{A_1B_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{A_1}|0\rangle_{B_1} + |1\rangle_{A_1}|1\rangle_{B_1}) \quad (1)$$

を考える。Aliceがこの $|\Phi^+\rangle_{A_1B_1}$ を準備して、qubit B1を量子通信回線を通じてBobに送る状況を考える。量子通信回線では、ビット反転エラーが確率 $(1 - F)$ で発生するとする。ただし、 $1/2 < F < 1$ とする。このような量子通信チャンネルは、状態 $|\Phi^+\rangle_{A_1B_1}$ を次のように変化させることを示しなさい。

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle_{A_1B_1} \langle\Phi^+| &\rightarrow F|\Phi^+\rangle_{A_1B_1} \langle\Phi^+| + (1 - F)X|\Phi^+\rangle_{A_1B_1} \langle\Phi^+|X \\ &= F|\Phi^+\rangle_{A_1B_1} \langle\Phi^+| + (1 - F)|\Psi^+\rangle_{A_1B_1} \langle\Psi^+| \quad (2) \end{aligned}$$

2. Aliceは、qubit A1、B1のベル状態 $|\Phi^+\rangle_{A_1B_1}$ と、qubit A2、B2のベル状態 $|\Phi^+\rangle_{A_2B_2}$ を用意して、上記の量子通信チャンネルを通じて、qubit B1、B2をBobに送るとする。AliceとBobが、 $|\Phi^+\rangle_{A_1B_1}$ と $|\Phi^+\rangle_{A_2B_2}$ を共有する確率はいくらか求めなさい。同様に、AliceとBobが、 $|\Phi^+\rangle_{A_1B_1}$ と $|\Psi^+\rangle_{A_2B_2}$ を共有する確率、 $|\Psi^+\rangle_{A_1B_1}$ と $|\Phi^+\rangle_{A_2B_2}$ を共有する確率、 $|\Psi^+\rangle_{A_1B_1}$ と $|\Psi^+\rangle_{A_2B_2}$ を共有する確率を求めなさい。
3. AliceとBobが、qubit A1、B1、A2、B2の共有を完了した後、図1に示されるように、自分の手元の2個のqubitに対して、CNOTゲートを作用させるとする。AliceとBobが、 $|\Phi^+\rangle_{A_1B_1}$ と $|\Phi^+\rangle_{A_2B_2}$ を共有している場合、CNOTゲート操作後の状態は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle_{A_1B_1} |\Phi^+\rangle_{A_2B_2} &= \frac{1}{2}(|00\rangle_{A_1B_1} |00\rangle_{A_2B_2} + |00\rangle_{A_1B_1} |11\rangle_{A_2B_2} \\ &\quad + |11\rangle_{A_1B_1} |00\rangle_{A_2B_2} + |11\rangle_{A_1B_1} |11\rangle_{A_2B_2}) \\ &\xrightarrow{\text{CNOT}_A} \frac{1}{2}(|00\rangle_{A_1B_1} |00\rangle_{A_2B_2} + |00\rangle_{A_1B_1} |11\rangle_{A_2B_2} \\ &\quad + |11\rangle_{A_1B_1} |10\rangle_{A_2B_2} + |11\rangle_{A_1B_1} |01\rangle_{A_2B_2}) \\ &\xrightarrow{\text{CNOT}_B} \frac{1}{2}(|00\rangle_{A_1B_1} |00\rangle_{A_2B_2} + |00\rangle_{A_1B_1} |11\rangle_{A_2B_2} \\ &\quad + |11\rangle_{A_1B_1} |11\rangle_{A_2B_2} + |11\rangle_{A_1B_1} |00\rangle_{A_2B_2}) \\ &= |\Phi^+\rangle_{A_1B_1} |\Phi^+\rangle_{A_2B_2} \quad (3) \end{aligned}$$

同様に、AliceとBobが、 $|\Phi^+\rangle_{A_1B_1}$ と $|\Psi^+\rangle_{A_2B_2}$ を共有している場合、 $|\Psi^+\rangle_{A_1B_1}$ と $|\Phi^+\rangle_{A_2B_2}$ を共有している場合、 $|\Psi^+\rangle_{A_1B_1}$ と $|\Psi^+\rangle_{A_2B_2}$ を共有している場合の、CNOTゲート操作後の状態を求めなさい。

4. 上記の手続きの後、Aliceはqubit A2を、Bobはqubit B2を、図1に示されるように $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基底で観測する。AliceとBobの観測結果が等しいときはqubit A1、B1を保持する。AliceとBobの観測結果が異なるときはqubit A1、B1を捨て去る。AliceとBobの観測結果が等しいという条件下で、AliceとBobが $|\Phi^+\rangle_{A_1B_1}$ を得る確率が、

$$F' = \frac{F^2}{F^2 + (1 - F)^2} \quad (4)$$

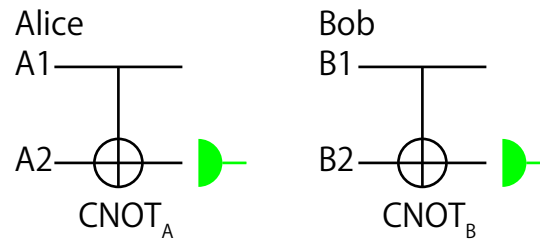


Figure 1: Alice と Bob の CNOT ゲート操作を示した図である。CNOT ゲート操作は次のように働くとする。量子ビット A1、A2 に対して CNOT ゲートを作用させた結果は、 $|i\rangle_{A1}|j\rangle_{A2} \xrightarrow{\text{CNOT}_A} |i\rangle_{A1}|j \oplus i\rangle_{A2}$ で与えられる。ただし、 $i, j \in \{0, 1\}$ とする。 $j \oplus i$ は、mod 2 の加算、すなわち、 j と i を足し合わせて 2 で割った余りを表すとする。

で与えられることを示しなさい。さらに、このとき、Alice と Bob が $|\Psi^+\rangle_{A1B1}$ を得る確率が、 $1 - F'$ で与えられることを示しなさい。また、 $1 > F > 1/2$ のとき、 $F' > F$ であることを示しなさい。

5. 上記の過程を繰り返すと、次第に Alice と Bob の共有する状態が $|\Phi^+\rangle_{A1B1}$ に近づくことを説明しなさい。