

練習問題 1

量子鍵配布プロトコル BB84 における、送信者 Alice の役割を考える。Alice が Z 基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ の光子を送信する様子が図 1 である。ただし、 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ は次のように 2 成分ベクトルで書き表されるとする。

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Alice が光子源 S0 から光子を放射して、光子が経路 P0 を通るとき、光子の状態は $|0\rangle$ であるとする。Alice が光子源 S1 から光子を放射して、光子が経路 P1 を通るとき、光子の状態は $|1\rangle$ であるとする。

Alice が X 基底 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ の光子を送信する様子が図 2 であるとする。光子源から放出された光子は、ビームスプリッタ BSa で二つの経路に分岐される。BSa の引き起こす、光子の状態に対するユニタリ変換は、次の行列で表されるとする。

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

X 基底の状態 $|+\rangle$ 、 $|-\rangle$ は次で与えられるとする。

$$|+\rangle = B|0\rangle, \quad |-\rangle = B|1\rangle \quad (3)$$

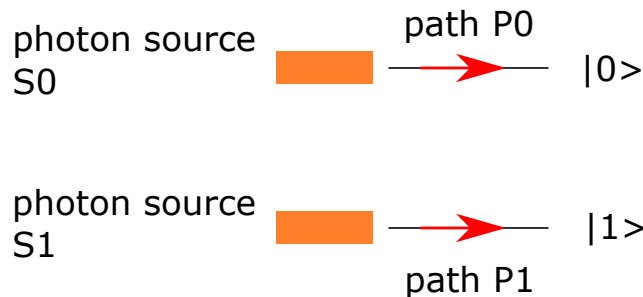


Figure 1: Alice が Z 基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ で光子を送信する様子

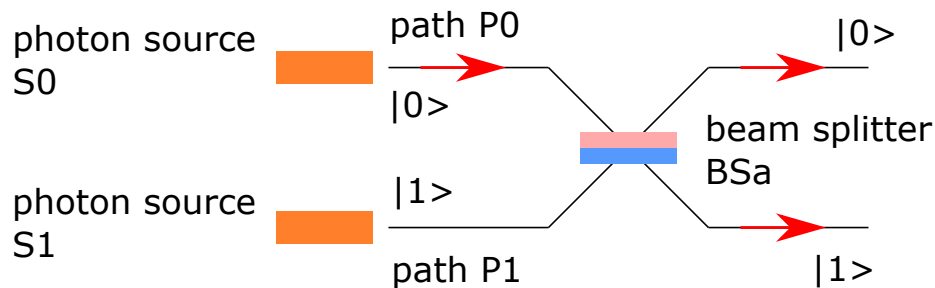


Figure 2: Alice が X 基底 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ で光子を送信する様子

1. $|+\rangle$ 、 $|-\rangle$ を 2 成分ベクトルで書きなさい。

2. 状態 $|x\rangle$ と $|y\rangle$ の内積を $\langle y|x\rangle$ と書くことにする。すなわち、

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad |y\rangle = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

として、

$$\langle y|x\rangle = y_0^* x_0 + y_1^* x_1 \quad (5)$$

とする。このとき、 $\langle 0|0\rangle$ 、 $\langle 0|1\rangle$ 、 $\langle 1|0\rangle$ 、 $\langle 1|1\rangle$ 、 $\langle ++\rangle$ 、 $\langle +-\rangle$ 、 $\langle -|\+\rangle$ 、 $\langle --\rangle$ 、 $\langle 0|\+\rangle$ 、 $\langle 0|-\rangle$ 、 $\langle 1|\+\rangle$ 、 $\langle 1|-\rangle$ 、 $\langle +|0\rangle$ 、 $\langle +|1\rangle$ 、 $\langle -|0\rangle$ 、 $\langle -|1\rangle$ を求めなさい。