作成者：吾妻広夫

練習問題

パウリ X 基底ベクトルを次で与える。

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

パウリ Y 基底ベクトルを次で与える。

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \tag{2}$$

パウリ Z 基底ベクトルを次で与える。

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

また、今、1-qubit の量子状態が以下で与えられているとする。

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{4}$$

1. 二つの状態の外積 $|0\rangle\langle 0|$、$|1\rangle\langle 1|$、$|+\rangle\langle +|$、$|-\rangle\langle -|$、$|i\rangle\langle i|$、$|-i\rangle\langle -i|$ を、2×2 行列として求めなさい。

   以下の点に注意すること。ここでいう外積の計算では、二つの状態ベクトルから行列 (演算子) が構成される。しかし、ベクトル解析で出てくる、二つの 3 次元ベクトルのベクトル積を、クロス積、あるいは、外積と呼ぶこともある。従って、ベクトル解析の議論をしている際は、3 次元ベクトル同士の外積は、やはりベクトルとなる。これらは、異なる数学的な操作に同じ名前が使われてしまっている例である。混乱しないように、意識して「外積」という言葉を使うこと。

2. $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$、$|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|$、$|i\rangle\langle i| + |-i\rangle\langle -i|$ を 2×2 行列として求めなさい。

3. $|0\rangle\langle 0|\psi\rangle$、$|1\rangle\langle 1|\psi\rangle$、$|+\rangle\langle +|\psi\rangle$、$|-\rangle\langle -|\psi\rangle$、$|i\rangle\langle i|\psi\rangle$、$|-i\rangle\langle -i|\psi\rangle$ を 2 成分ベクトルとして求めなさい。