解答

作成者：吾妻広夫

1.

$$\rho = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. 次の式変形が有効である。

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & 1-a_z \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

よって、以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1+a_z) &= |\alpha|^2 \\ \frac{1}{2}(a_x - ia_y) &= \alpha\beta^* \end{aligned} \tag{3}$$

よって、以下を得る。

$$\begin{aligned} a_x &= 2\mathrm{Re}[\alpha\beta^*] \\ a_y &= -2\mathrm{Im}[\alpha\beta^*] \\ a_z &= 2|\alpha|^2 - 1 \end{aligned} \tag{4}$$

3.

$$\begin{aligned} a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 &= 4(\mathrm{Re}[\alpha\beta^*])^2 + 4(\mathrm{Im}[\alpha\beta^*])^2 + (2|\alpha|^2 - 1)^2 \\ &= (\alpha\beta^* + \alpha^*\beta)^2 - (\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)^2 + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 \\ &= 4\alpha\beta^*\alpha^*\beta + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 \\ &= 4|\alpha|^2|\beta|^2 + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 \\ &= (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

4. 次の関係に注意する。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \\ &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \end{aligned} \tag{6}$$

よって、以下を得る。

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos\frac{\theta}{2}, \\ \beta &= e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{aligned} \tag{7}$$

よって、Bloch ベクトルは以下のように書ける。

$$
\begin{aligned}
a_x &= 2\mathrm{Re}[\alpha\beta^*] \\
&= 2\cos\frac{\theta}{2}\cos\phi\sin\frac{\theta}{2} \\
&= \cos\phi\sin\theta, \\
a_y &= -2\mathrm{Im}[\alpha\beta^*] \\
&= -2\cos\frac{\theta}{2}(-1)\sin\phi\sin\frac{\theta}{2} \\
&= \sin\phi\sin\theta, \\
a_z &= 2|\alpha|^2 - 1 \\
&= 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \\
&= \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \\
&= \cos\theta
\end{aligned} \tag{8}
$$

5. 密度行列は、以下のように求まる。

$$
\begin{aligned}
\rho &= p\rho_1 + (1-p)\rho_2 \\
&= p\frac{1}{2}(I + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}) + (1-p)\frac{1}{2}(I + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \\
&= \frac{1}{2}\{I + [p\boldsymbol{a} + (1-p)\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{\sigma}\} \\
&= \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\sigma})
\end{aligned} \tag{9}
$$

よって、以下を得る。

$$\boldsymbol{c} = p\boldsymbol{a} + (1-p)\boldsymbol{b} \tag{10}$$

図 2 より、$\boldsymbol{c}$ は、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ よりノルムが小さいこと、すなわち、1 より小さいことが分かる。