練習問題

作成者：吾妻広夫

1-qubit の状態を表現する方法として、

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{1}$$

というようにベクトルとして書き下す方法と、

$$\rho = p|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + (1-p)|\psi_2\rangle\langle\psi_2|, \quad 0 \le p \le 1 \tag{2}$$

ただし、$|\psi_1\rangle$、$|\psi_2\rangle$ は任意の 1-qubit 状態、というように密度行列として書き下す方法がある。ここでは、1-qubit 状態を記述する第三の方法として、Bloch ベクトルを考える。

1. まず、状態が式 (1) の $|\psi\rangle$、ただし、

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

というように、2 成分ベクトルで与えられる場合を考える。この場合を純粋状態と呼び、その密度行列は、

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \tag{4}$$

で与えられる。密度行列 ρ を 2×2 行列の形で書き下しなさい。

2. 与えられた密度行列 ρ を、以下の形に変形したとする。

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \tag{5}$$

ただし、$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$、$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$、

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

とする。このベクトル $\boldsymbol{a}$ を Bloch ベクトルと呼ぶ。密度行列が式 (4) で与えられるときの Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}$ を求めなさい。

3. 上で求めた Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}$ のノルムが 1 に等しいことを示しなさい。このように、純粋状態の Bloch ベクトルのノルムは、常に 1 となる。

4. 1-qubit の任意の状態 $|\psi\rangle$ を、次のように二つの角度パラメータ θ、ϕ で表すことも可能である。

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi \tag{7}$$

この場合の Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}$ を、θ、ϕ を使って表しなさい。こうして得られた Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}$ は、図 1 のように極座標表示した、半径 1 の球面上の一点に相当する。

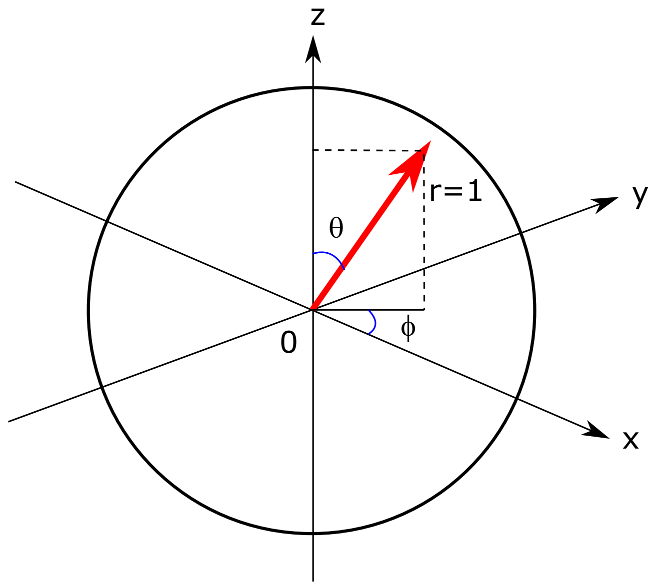

Figure 1: 極座標表示した Bloch ベクトル

5. 以下のようにして二つの純粋状態を用意する。

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \quad \rho_2 = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{8}$$

ρ_1、ρ_2 から、次のようにして混合状態を構成する。

$$\rho = p\rho_1 + (1-p)\rho_2, \quad 0 \le p \le 1 \tag{9}$$

このときの、ρ の Bloch ベクトル $\boldsymbol{c}$ を求めなさい。また、$p \neq 0$ かつ $p \neq 1$ のとき、$\boldsymbol{c}$ のノルムが 1 未満となることを示しなさい。その際、図 2 を参考にしなさい。これより、混合状態の Bloch ベクトルは、Bloch 球の表面ではなく、内部に存在することが理解される。

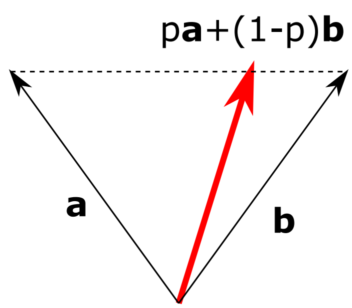

Figure 2: Bloch ベクトルの和について