

解答

1. 密度演算子 ρ は、次のように書ける。

$$\begin{aligned}\rho &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} (\alpha^*, \beta^*) \\ &= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{1}$$

密度演算子 ρ' は、次のように書ける。

$$\begin{aligned}\rho' &= (1-p)\rho + pX\rho X \\ &= (1-p) \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-p)|\alpha|^2 + p|\beta|^2 & (1-p)\alpha\beta^* + p\alpha^*\beta \\ (1-p)\alpha^*\beta + p\alpha\beta^* & (1-p)|\beta|^2 + p|\alpha|^2 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2}$$

2. 測定演算子 Π_+^Z 、 Π_-^Z は次のように書き下せる。

$$\Pi_+^Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_-^Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{3}$$

ρ に対して、 Π_+^Z 、 Π_-^Z を観測する確率は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\text{Tr}[\rho\Pi_+^Z] &= |\alpha|^2, \\ \text{Tr}[\rho\Pi_-^Z] &= |\beta|^2\end{aligned}\tag{4}$$

ρ' に対して、 Π_+^Z 、 Π_-^Z を観測する確率は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\text{Tr}[\rho'\Pi_+^Z] &= (1-p)|\alpha|^2 + p|\beta|^2, \\ \text{Tr}[\rho'\Pi_-^Z] &= (1-p)|\beta|^2 + p|\alpha|^2\end{aligned}\tag{5}$$

- 3.

$$\begin{aligned}\rho'' &= (1-p)\rho + pZ\rho Z \\ &= (1-p) \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & (1-2p)\alpha\beta^* \\ (1-2p)\alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{6}$$

4. 測定演算子 Π_+^X 、 Π_-^X は次のように書き下せる。

$$\Pi_+^X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi_-^X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\tag{7}$$

ρ に対して、 Π_+^Z 、 Π_-^Z を観測する確率は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\rho\Pi_+^Z] &= |\alpha|^2, \\ \mathrm{Tr}[\rho\Pi_-^Z] &= |\beta|^2\end{aligned}\tag{8}$$

ρ に対して、 Π_+^X 、 Π_-^X を観測する確率は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\rho\Pi_+^X] &= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}[\alpha^*\beta], \\ \mathrm{Tr}[\rho\Pi_-^X] &= \frac{1}{2} - \mathrm{Re}[\alpha^*\beta]\end{aligned}\tag{9}$$

ρ'' に対して、 Π_+^Z 、 Π_-^Z を観測する確率は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\rho''\Pi_+^Z] &= |\alpha|^2, \\ \mathrm{Tr}[\rho''\Pi_-^Z] &= |\beta|^2\end{aligned}\tag{10}$$

ρ'' に対して、 Π_+^X 、 Π_-^X を観測する確率は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\rho''\Pi_+^X] &= \frac{1}{2} + (1 - 2p)\mathrm{Re}[\alpha\beta^*], \\ \mathrm{Tr}[\rho''\Pi_-^X] &= \frac{1}{2} - (1 - 2p)\mathrm{Re}[\alpha\beta^*]\end{aligned}\tag{11}$$