作成者：吾妻広夫

練習問題

パウリ X 基底ベクトルを次で与える。

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

パウリ Z 基底ベクトルを次で与える。

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

ユニタリ演算子 X、Z を次で与える。

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

また、今、1-qubit の量子状態が以下で与えられているとする。

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{4}$$

1. 密度行列 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ に対する、ビット反転チャンネルは以下で与えれる。

$$\rho \to \rho' = (1-p)\rho + pX\rho X \tag{5}$$

   上記のチャンネルの出力を 2×2 行列で書き表しなさい。

2. 上記の密度行列 ρ、ρ' に対して、Π^Z_+、Π^Z_- を観測する確率を求めなさい。ただし、$\Pi^Z_+ = |0\rangle\langle 0|$、$\Pi^Z_- = |1\rangle\langle 1|$ とする。

3. 密度行列 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ に対する、位相反転チャンネルは以下で与えれる。

$$\rho \to \rho'' = (1-p)\rho + pZ\rho Z \tag{6}$$

   上記のチャンネルの出力を 2×2 行列で書き表しなさい。

4. 上記の密度行列 ρ、ρ'' に対して、Π^Z_+、Π^Z_-、Π^X_+、Π^X_- を観測する確率を求めなさい。ただし、$\Pi^X_+ = |+\rangle\langle +|$、$\Pi^X_- = |-\rangle\langle -|$ とする。