

練習問題

パウリ Z 基底ベクトルを次で与える。

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

また、パウリ X 基底ベクトルを次で与える。

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

今、1-qubit の量子状態が以下で与えられているとする。

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (3)$$

1. 以下が成立することを示しなさい。

$$|\psi\rangle = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad (4)$$

2. 状態 $|\psi\rangle$ に対して、パウリ Z 基底ベクトル $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ で測定して、 $|0\rangle$ を検出する確率は、次で与えられる。

$$\text{Prob}\{+1\} = |\langle 0|\psi\rangle|^2 \quad (5)$$

また、 $|0\rangle$ を検出する確率は、次で与えられる。

$$\text{Prob}\{-1\} = |\langle 1|\psi\rangle|^2 \quad (6)$$

$\text{Prob}\{+1\}$ 、 $\text{Prob}\{-1\}$ を、式 (3) の係数を使って書き表しなさい。

3. 状態 $|\psi\rangle$ に対して、パウリ X 基底ベクトル $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ で測定して、 $|+\rangle$ を検出する確率は、次で与えられる。

$$\text{Prob}\{+1\} = |\langle +|\psi\rangle|^2 \quad (7)$$

また、 $|-\rangle$ を検出する確率は、次で与えられる。

$$\text{Prob}\{-1\} = |\langle -|\psi\rangle|^2 \quad (8)$$

$\text{Prob}\{+1\}$ 、 $\text{Prob}\{-1\}$ を、式 (3) の係数を使って書き表しなさい。

4. パウリ Y 基底ベクトルを次で与える。

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (9)$$

状態 $|\psi\rangle$ に対して、パウリ Y 基底ベクトル $\{|i\rangle, |-i\rangle\}$ で測定して、 $|i\rangle$ を検出する確率は、次で与えられる。

$$\text{Prob}\{+1\} = |\langle i|\psi\rangle|^2 \quad (10)$$

また、 $|-i\rangle$ を検出する確率は、次で与えられる。

$$\text{Prob}\{-1\} = |\langle -i|\psi\rangle|^2 \quad (11)$$

$\text{Prob}\{+1\}$ 、 $\text{Prob}\{-1\}$ を、式 (3) の係数を使って書き表しなさい。