



作成者：吾妻広夫

練習問題

以下の3種類の行列をパウリ行列と呼ぶ。

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

1. $XX, XY, XZ, YX, YY, YZ, ZX, ZY, ZZ$ を、 X, Y, Z, I を使って表しなさい。ただし、

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

とする。

2. 任意の 2×2 行列 A の adjoint matrix(随伴行列) A^\dagger は次で与えられる。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \quad (3)$$

A^\dagger が、行列 A の行と列を入れ替える転置操作をして、各成分について複素共役を取った結果得られる行列と一致することを示しなさい。なお、これらの操作、すなわち A から A^\dagger を構成する操作を、adjoint(随伴)という以外に、「エルミート共役」を取る、「自己共役」を取る、という場合がある。

3. $X^\dagger, Y^\dagger, Z^\dagger$ を、 X, Y, Z を使って表しなさい。
4. 次が成立する得、行列 A はユニタリ行列であるという。

$$A^\dagger A = AA^\dagger = I \quad (4)$$

ただし、 I は単位行列(恒等行列)とする。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

X, Y, Z がユニタリ行列であることを示しなさい。